



**EDUCACIÓN**  
SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA



TECNOLÓGICO  
NACIONAL DE MÉXICO

Instituto Tecnológico de Pachuca

**DISEÑO Y CONSTRUCCIÓN DE UN ABSORBEDOR NO LINEAL PARA EL CONTROL SEMI-ACTIVO DE VIBRACIONES**

**BAJO LA OPCION:**

**TESIS**

**PARA OBTENER EL TITULO DE  
MAESTRO EN INGENIERÍA MECÁNICA**

**PRESENTA  
ING. EDWIN RODRÍGUEZ HERNÁNDEZ**

**ASESOR:  
DR. HUGO FRANCISCO ABUNDIS FONG**

**SINODALES:  
DR. LUIS GERARDO TRUJILLO FRANCO  
DR. IGNACIO RAMÍREZ VARGAS**

**Pachuca de Soto, Hgo. (Septiembre) 2022  
93 páginas**



Instituto Tecnológico de Pachuca  
ISO 9001:2015



**Ricardo  
2022 Flores  
Año de Magón**  
PRECURSOR DE LA REVOLUCIÓN MEXICANA



### Consejo de Posgrado de la Maestría en Ingeniería Mecánica ACTA

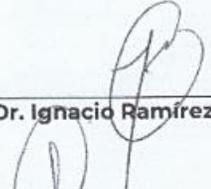
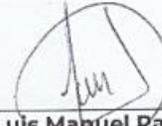
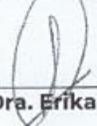
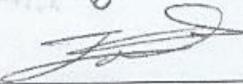
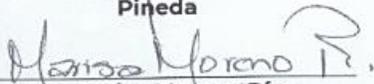
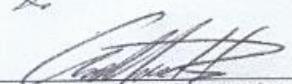
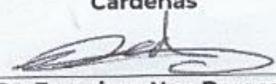
Siendo las 13:00 horas del 19 de febrero de 2022, el Consejo de Posgrado de la Maestría en Ingeniería Mecánica manifiesta la APROBACIÓN del tema de Tesis: *Diseño y Construcción de un Absorbedor No Lineal para el Control Semiactivo de Vibraciones*, con el siguiente contenido:

- Resumen/Abstract
- Nomenclatura
- Contenido
- Índice de cuadros, gráficas y figuras.
- 1- Introducción
- 2- Estado del arte
- 3- Marco teórico
- 3- Materiales y métodos
- 4- Resultados numéricos y experimentales
- Conclusiones
- Bibliografía
- Apéndices

Para cubrir el requisito correspondiente a la Tesis para que el Ing. Edwin Rodríguez Hernández obtenga el grado de Maestría en Ingeniería Mecánica, bajo la dirección del Dr. Hugo Francisco Abundis Fong y la codirección del Dr. Luis Gerardo Trujillo Franco.

#### ATENTAMENTE

*Excelencia en Educación Tecnológica®*  
*"El Hombre Alimenta el Ingenio en Contacto con la Ciencia"®*

 <b>Dr. Ignacio Ramírez Vargas</b>	 <b>Dr. Juan Serrano Arellano</b>	 <b>Dr. Luis Manuel Palacios Pineda</b>
 <b>Dra. Erika Osiris Ávila Dávila</b>	 <b>Dr. Edgar Ernesto Vera Cárdenas</b>	 <b>Dra. Marisa Moreno Ríos</b>
 <b>Dr. Armando Irvin Martínez Pérez</b>	 <b>Dr. Francisco Noe Demesa</b>	 <b>Dr. Hugo Francisco Abundis Fong</b>



Instituto Tecnológico de Pachuca  
ISO 9001:2015  
Registro: RSCC-1002  
Vigencia: 2002-07-28  
Alcance: Proceso educativo, comprende desde la inscripción hasta la entrega del título profesional.

Carretera México - Pachuca Km. 87.5, Col. Venta Prieta C.P. 42080 Pachuca de Soto, Hidalgo.  
Tels. 771 7113073, 771 7113596, 771 7113140, 771 7115119 y 771 7113399  
e-mail: [depi@pachuca.tecnm.mx](mailto:depi@pachuca.tecnm.mx) | [tecnm.mx](http://tecnm.mx) | [pachuca.tecnm.mx](http://pachuca.tecnm.mx)





Pachuca, Hidalgo, **9/Septiembre/2022**  
OFICIO No. DEPI-0133-22

**C. ING. EDWIN RODRÍGUEZ HERNÁNDEZ  
PRESENTE**

La que suscribe, jefa de la División de Estudios de Posgrado e Investigación, le comunica que los miembros de la Comisión Revisora, designada por el Consejo de Posgrado de la Maestría en Ingeniería Mecánica para examinar su Tesis:

**Diseño y Construcción de un Absorbedor No Lineal  
para el Control Semiactivo de Vibraciones**

se han reunido, y después de intercambiar opiniones manifiestan su aprobación de la Tesis, en virtud que satisface los requisitos señalados por las disposiciones reglamentarias vigentes y, en consecuencia, se autoriza su impresión.

Sin otro particular por el momento, quedo de Usted.

**ATENTAMENTE**

*Excelencia en Educación Tecnológica®*

*"El Hombre Alimenta el Ingenio en Contacto con la Ciencia"®*



**M. A. C. ELODIA CLAUDIA GUERRERO ORTIZ  
JEFA DE LA DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO E INVESTIGACIÓN**

C.p. Archivo  
ECGO/LMPP



Instituto Tecnológico de Pachuca  
ISO 9001:2015  
Registro INCOE 1002  
Vigencia: 2022-07-26  
Alcance: Proceso educativo, comprende desde la inscripción hasta la entrega del título profesional.



## **Dedicatorias**

A mis padres:

Por apoyarme a seguir estudiando y buscar nuevas metas, a pesar de los problemas que esto les pueda haber causado.

A mis Familiares:

Por permitirme siempre contar con su apoyo, y siempre brindarme su generosidad.

## **Agradecimientos**

A mi Escuela:

A la que me ha permitido desarrollarme como profesionalista,  
tanto durante la licenciatura como también en la maestría.

Al CONACYT

Por el apoyo económico que me otorgó como becario.

A mis Catedráticos:

Por su paciencia, apoyo y conocimientos compartidos.

A mis Profesores y Compañeros

Por su profesionalismo y apoyo durante cada una de las  
etapas de mi formación.

# índice general

Tabla de contenido

Dedicatorias .....	I
Agradecimientos .....	II
índice general.....	III
Lista de figuras .....	VI
Lista de tablas .....	VIII
Resumen .....	IX
Abstract.....	X
1. Introducción.....	1
1.1 Planteamiento del problema .....	2
1.2 Justificación .....	3
1.3 Hipótesis .....	4
1.4 Objetivos.....	4
1.4.1 Objetivo general.....	4
1.4.2 Objetivos específicos .....	4
2. Estado del Arte .....	6
2.1 Contribuciones importantes .....	6
2.2 Estructura más icónica con amortiguador de vibraciones, Edificio de Taipéi.....	9
3. Marco teórico.....	10
3.1 Vibración u oscilación .....	10
3.2 Grados de libertad del sistema.....	10
3.3 Componentes básicos de un sistema vibratorio .....	11
3.4 Modelo dinámico .....	11
3.5 Frecuencia natural.....	12

3.6 Vibración libre con amortiguamiento viscoso .....	12
3.7 Vibración forzada no amortiguada sometida a una fuerza armónica.....	15
3.8 Resonancia .....	16
3.9 Control de vibración .....	16
3.9.1. Cambio de las frecuencias naturales .....	17
3.9.2. inyección de amortiguamiento .....	17
3.9.3. Aislamiento de la vibración .....	18
3.10 Análisis de una estructura tipo edificio discretizada en un grado de libertad sometida a movimiento armónico en la base .....	19
3.11 Análisis de espectro .....	20
3.12. Absorbedor de vibración.....	20
3.13 Uso del Formalismo de Euler-Lagrange para derivar ecuaciones de movimiento ....	22
3.14 La Transformada Discreta de Fourier (TDF).....	23
3.15 La Transformada Rápida de Fourier (FFT) .....	23
3.16 Análisis modal experimental .....	23
3.17 Método de Peak Picking .....	24
3.18 Método de elemento finito .....	25
3.19 Vibraciones no lineales .....	25
3.20 Sistemas autoparamétricos.....	26
3.21 Controlador PID.....	30
4. Materiales y Métodos .....	32
4.1 Modelo dinámico del sistema considerando 2 grados de libertad .....	32
4.2 Condición de sintonización de un absorbedor autoparamétrico. ....	39
4.3 Resultados en simulación .....	40
4.4 Análisis frecuencial aproximado .....	43
4.5 Modelo dinámico del sistema considerando 3 grados de libertad .....	46
5. Resultados Numéricos y Experimentales .....	51

5.1 Estimación de parámetros modales .....	52
5.1.1 Sistema primario .....	52
5.1.2 Sistema secundario.....	55
5.2 Determinación de las características físicas del sistema primario y secundario (masa, rigidez, amortiguamiento viscoso).....	56
5.3 Comparación de resultados experimentales y numéricos .....	57
5.4 Esquema de control propuesto de 2gdl .....	61
5.4.1 Aplicación del control semi-activo de 2gdl .....	64
5.5 Estructura de control propuesto de 3gdl basada ecuaciones obtenidas con el método de escalas múltiples (MEM).....	69
5.5.1 Aplicación del control semi-activo de 3gdl .....	71
6. Conclusiones.....	75
Referencias .....	76
Anexo A.....	78
Planos de la plataforma experimental en SolidWorks.....	78
Anexo B.....	87

## Lista de figuras

Figura 1 Diagrama esquemático del problema dinámico que se piensa abordar.....	2
Figura 2 Edificio Taipéi 101 – Taiwán [11].....	9
Figura 3 Sistema vibratorio fundamental de un grado de libertad. ....	11
Figura 4 Viga en voladizo con un peso aplicado en el extremo y su representación equivalente. 12	
Figura 5 Sistema de un grado de libertad con amortiguamiento viscoso. ....	13
Figura 6 Sistema masa-resorte-amortiguador con excitación en la base [13]. ....	19
Figura 7 Absorbedor de vibración dinámico no amortiguado [13]. ....	22
Figura 8 Metodo Peak-Picking [15]. ....	25
Figura 9 Absorbedor de vibraciones autoparamétrico simple [17]. ....	27
Figura 10 Funcionamiento del absorbedor de vibraciones autoparamétrico [17]. ....	29
Figura 11 Ala de avión con turborreactores [17].....	30
Figura 12 Sistema de control PID [18].....	31
Figura 13 Diagrama esquemático de un absorbedor autoparamétrico [19].....	33
Figura 14 Respuesta dinámica del sistema primario sin y con absorbedor autoparamétrico. ....	41
Figura 15 Respuesta dinámica del sistema secundario tipo autoparamétrico. ....	41
Figura 16 FRF del sistema primario con y sin absorbedor autoparamétrico.....	42
Figura 17 FRF del sistema secundario cuando se presenta interacción autoparamétrica.....	42
Figura 18 Respuesta frecuencial aproximada del sistema primario sin interacción autoparamétrica utilizando MEM.....	44
Figura 19 Respuesta frecuencial aproximada del sistema primario con interacción autoparamétrica. ....	44
Figura 20 Respuesta frecuencial del sistema secundario durante la interacción autoparamétrica. 45	
Figura 21 Sistemas primario y secundario acoplados. ....	51
Figura 22 Sistema de adquisición de datos.....	52
Figura 23 Respuesta libre del sistema primario ante una condición inicial de posición. ....	53
Figura 24 Transformada Rápida de Fourier de la respuesta libre de la estructura tipo edificio....	53
Figura 25 Respuesta libre del sistema secundario. ....	55
Figura 26 Transformada Rápida de Fourier de la respuesta libre del sistema secundario. ....	56
Figura 27 Comparación de la respuesta libre del sistema primario.....	57
Figura 28 Comparación de la respuesta libre del sistema secundario. ....	58

Figura 29 Respuesta numérica del sistema primario ante excitación en su base. ....	59
Figura 30 Respuesta numérica del sistema secundario ante interacción autoparamétrica. ....	59
Figura 31 Respuesta frecuencial aproximada del sistema primario sin interacción autoparamétrica. .....	60
Figura 32 Respuesta frecuencial aproximada del sistema primario con interacción autoparamétrica. .....	60
Figura 33 Respuesta frecuencial aproximada del sistema secundario durante la interacción autoparamétrica. ....	61
Figura 34 Estructura básica de control de 2gdl. ....	62
Figura 35 Diagrama esquemático del sistema en 2gdl. ....	62
Figura 36 Amplitud sostenida del sistema secundario. ....	65
Figura 37 Pulsos necesarios para permitir el control semi-activo. ....	66
Figura 38 Comparación del comportamiento del sistema primario ante cambio frecuencial en diversas condiciones. ....	67
Figura 39 Comparación del comportamiento del sistema secundario ante cambio frecuencial en diversas condiciones. ....	67
Figura 40 Valor de L deseada para uso en el control semi-activo. ....	68
Figura 41 Señal error. ....	68
Figura 42 Esfuerzo de control usando control integral. ....	69
Figura 43 Estructura básica de control 3gdl. ....	69
Figura 44 Diagrama del sistema en 3gdl. ....	70
Figura 45 Comparación del comportamiento del sistema primario ante cambio frecuencial en diversas condiciones. ....	72
Figura 46 Comparación del comportamiento del sistema secundario ante cambio frecuencial en diversas condiciones. ....	73
Figura 47 Valor de L resultante. ....	73
Figura 48 Señal error. ....	73
Figura 49 Esfuerzo de control usando control PID. ....	74
Figura 50 Representación del modelo dinámico a simular de 2gdl. ....	90
Figura 51 Representación del modelo dinámico a simular en 3gdl. ....	93

## Lista de tablas

Tabla 1 Descripción de los parámetros que repercuten en la aplicación de un absorbedor de vibraciones autoparamétrico tipo pendular aplicado a una estructura flexible tipo edificio. ....	3
Tabla 2 Parámetros para el análisis del sistema primario con absorbedor autoparamétrico. ....	40
Tabla 3 Parámetros modales del sistema primario. ....	54
Tabla 4 Parámetros modales del sistema secundario.....	56
Tabla 5 Parámetros previos a los experimentales del absorbedor de vibraciones.....	58
Tabla 6 Reglas de sintonización de Ziegler-Nichols basada en la ganancia crítica $K_{cr}$ y periodo crítico $P_{cr}$ [22]. ....	64
Tabla 7 Resultados de usar la regla de Ziegler-Nichols. ....	65
Tabla 8 Cambios en la frecuencia de simulación. ....	72

## **Resumen**

En la actualidad, la protección de las edificaciones, estructuras y máquinas ante los efectos vibratorios es algo indispensable para el continuo uso de estos sistemas. En el presente trabajo de tesis, se aborda el problema de absorción semiactiva de vibraciones no lineales en estructuras flexibles, enfocados en los efectos de absorción de energía de elementos no lineales que permiten obtener diversas ventajas con respecto a los sistemas ya existentes. Se decidió utilizar una estructura tipo edificio de un piso, elaborada de aluminio y montada en un robot paralelo de 6 grados de libertad, conocido como hexápodo; el cual perturba al sistema en su base por medio de señales armónicas en su frecuencia natural principal. El absorbedor de vibraciones tipo pendular se encuentra restringido a oscilar en un plano horizontal, una vez obtenido el modelo dinámico del sistema completo, usando la metodología de Euler-Lagrange y utilizando las condiciones de sintonización para sistemas autoparamétricos establecidos por Haxton y Barr (1972) [1], se simuló la respuesta dinámicas de los dos sistemas mediante Matlab-Simulink, y de ese modo obtener la respuesta dinámica aproximada y el porcentaje de absorción de energía esperado para los resultados experimentales. Con la necesidad de atenuar un rango más amplio de frecuencias, es adecuado el uso de un control PID para modificar la inercia del absorbedor según corresponda y asegurar las condiciones de sintonización.

Palabras clave: absorbedor de vibraciones, control semiactivo, estructura tipo edificio.

## **Abstract**

At present, the protection of buildings, structures and machines against vibratory effects is essential for the continuous use of these systems: in this work, the problem of semi active absorption of vibrations in harmonic oscillations is addressed, focusing on the effects of energy absorption of non-linear elements that allow obtaining various advantages and disadvantages with respect to existing systems. For experimental validation, a one-story building-type structure is used, this experimental plant is made of aluminum, and mounted on a parallel 6-degree-of-freedom robot, known as a hexapod, which disturbs the system at its base by harmonic signals at its main natural frequency. The pendulum-type vibration absorber is restricted to oscillating in a horizontal plane is coupled in a non-linear way in the upper part, once the dynamic model of the complete system has been obtained, using the Euler-Lagrange methodology and using the tuning conditions For autoparametric systems established by Haxton and Barr (1972) [1], the dynamic response of the two systems was simulated using Matlab-Simulink, and thus obtaining the approximate dynamic response and the percentage of energy absorption expected for the experimental results. For a wider range of frequencies, the use of PID control is appropriate to modify the absorber inertia accordingly and ensure tuning conditions.

Keywords: vibration absorber, semi-active control, building-like structure.

## 1. Introducción

Las vibraciones mecánicas son un tema de gran interés, ya que es un problema que se encuentra inmerso en diversos ámbitos laborales en los cuales se pueden observar catastróficos resultados.

En los estudios de atenuación de vibraciones sobre sistemas mecánicos más conocidos y con mejores resultados hasta el momento, en lo particular se hace referencia a los esquemas pasivos, conocidos como Amortiguador de Masa Sintonizada (TMD, por sus siglas en inglés), los cuales cuentan con un diseño sencillo y comportamiento lineal, pero a pesar de eso, generalmente se encuentran limitados en su respuesta, debido a que se diseñan para la atenuación o minimización de una frecuencia o modo de vibración en particular [2]. Debido a esta situación existe oportunidad de innovación en este ámbito, actualmente el estudio de los sistemas autoparamétricos está empezando a ganar interés al tener efectos diversos comparados a su contraparte, a causa de su comportamiento no lineal, los cuales podrían permitir obtener respuestas con mayor rango de disipación.

En particular, este trabajo de análisis se centra en obras civiles y su comportamiento ante una excitación dinámica externa en su base, más específicamente, en estructuras tipo edificio. En este trabajo se considera la atenuación de vibraciones mediante el uso de un péndulo con giro en un plano horizontal empotrado en la parte superior de una estructura flexible tipo edificio de un piso y excitada en su base por una señal armónica con valor igual o cercano a su frecuencia natural, lo que es igual a trabajar en condiciones resonantes. Se le proporciona una longitud efectiva al péndulo de tal modo que sus propiedades físicas permitan maximizar la amplitud de oscilación y a su vez, permitir al absorbedor en consecuencia minimizar la dinámica del sistema primario.



*Tabla 1 Descripción de los parámetros que repercuten en la aplicación de un absorbedor de vibraciones autoparamétrico tipo pendular aplicado a una estructura flexible tipo edificio.*

Parámetro	Descripción
$\theta(t)$	Grado de libertad del péndulo expresado en radianes
$L(t)$	Grado de libertad asociado a la longitud del péndulo
$\ddot{x}_b(t)$	Excitación aplicada a la base de la estructura (en forma de aceleración)
$c_1$	Amortiguamiento viscoso de la estructura
$c_2$	Amortiguamiento viscoso del péndulo
$m_1$	Masa de la estructura (sistema primario)
$m_2$	Masa del péndulo
$m_b$	Masa de la barra del péndulo
$k_1$	Rigidez equivalente de las columnas
$k_2$	Rigidez del péndulo
$l_b$	Longitud de la barra del péndulo

## 1.2 Justificación

El control de vibraciones ha sido importante durante varias décadas y se han presentado muchos dispositivos capaces de atenuar las oscilaciones en estructuras. Mediante la adición de un sistema vibratorio extra al sistema primario con rigidez y amortiguación adecuadas, la respuesta de la estructura principal podría disminuir significativamente durante la excitación externa, como sismos o cargas debidas al viento [3].

La aplicación de los esquemas de absorción de vibraciones es un tema que permanece abierto, ofreciendo la posibilidad de realizar investigación para aportar nuevos esquemas o mejorar los ya existentes al hacer uso de las herramientas matemáticas actuales y los avances tecnológicos en el área de sensores y actuadores para lograr dicho objetivo.

El campo de aplicación del tema es para estructuras flexibles tipo edificio de un solo piso, ante excitaciones armónicas (cuya componente frecuencial será igual o cercana a la frecuencia natural); dadas sus ventajas, como son: bajos costos de producción y reducción del peso global, permite ser extendido a otros campos ingenieriles como pueden ser: gabinetes ligeros para electrodomésticos, carrocerías automotrices, fuselajes para la industria aeroespacial, robots de eslabones flexibles, palas y torres de soporte para los aerogeneradores, entre otros.

### **1.3 Hipótesis**

Dado un oscilador mecánico que debido a sus condiciones de operación experimenta vibraciones resonantes, es posible mitigar estos efectos dinámicos indeseables por medio de un esquema de control semi-activo de vibraciones utilizando un absorbedor no lineal tipo pendular con longitud variable para lograr una sintonización automática en caso de que cambien las condiciones de excitación del sistema. La longitud óptima del absorbedor semi-activo se obtiene parametrizando la Función de Respuesta Frecuencial (FRF), obtenida utilizando un método de perturbación (escalas múltiples), en términos de la longitud efectiva del péndulo y posibles cambios en la frecuencia de excitación cercanos a la condición de sintonización del caso pasivo. El problema de regulación resultó, en un inicio, usando una ley de control tipo Proporcional-Derivativa (PD). La validación experimental se realizará sobre un robot paralelo de seis grados de libertad (Hexápodo-Quanser) en un trabajo futuro; el cual, se localiza en el laboratorio de robótica y control, del Tecnológico Nacional de México/Instituto Tecnológico de la Laguna.

### **1.4 Objetivos**

#### **1.4.1 Objetivo general**

Análisis, diseño, construcción e integración de una plataforma experimental con un absorbedor autoparamétrico (pasivo/semiactivo) para la atenuación de vibraciones resonantes en una estructura flexible tipo edificio.

#### **1.4.2 Objetivos específicos**

1. Obtener el modelo dinámico del sistema completo.
2. Diseño e integración de la plataforma experimental:
  - Diseño de la estructura y componentes mecánicos.
  - Selección y caracterización del resorte del sistema secundario.
  - Diseño de un servomecanismo (servomotor con husillo de bolas) para la sintonización semiactiva del absorbedor pendular.

- Instrumentación con decodificadores ópticos y acelerómetros.
  - Integración con una tarjeta de adquisición de datos basada en la plataforma Matlab/Simulink.
3. Validación experimental para absorción pasiva y semiactiva utilizando una ley de control tipo Proporcional-Integral-Derivativa (PID).

### 2. Estado del Arte

#### 2.1 Contribuciones importantes

La vibración es un problema constante, ya que puede afectar el rendimiento de un sistema mecánico, así como provocar fatiga, daño y falla en una estructura. La atenuación de la vibración es un factor clave para prevenir estos factores indeseados. Constantemente ingenieros y científicos trabajan para desarrollar teorías más complejas para comprender, analizar, medir y eliminar las vibraciones [4]. A continuación, se muestran algunos trabajos de investigación, basándose en la correlación al tema de investigación a desarrollar:

R. S. Haxton, A. D. S. Barr (1972). Se implementó el uso de un sistema de masa-resorte lineal sometido a una fuerza periódica, cuyo movimiento actúa paraméricamente. Se demostró la acción básica del sistema de forma experimental y teóricamente se predijo la mayoría de las características principales, encontrando que en comparación con un TMD de la misma relación de masa es no favorable hacia el lado del absorbente autoparamétrico, pero se concluye que hay todavía más desarrollo del sistema autoparamétrico que podría ser llevado a cabo y resultar en ventajosas aplicaciones [1].

A. Vyas, A. K. Bajaj (2001). Se comparó el estudio del sistema con  $n$  péndulos como absorbentes con el sistema con un solo amortiguador de vibraciones autoparamétrico con masa total idéntica, el sistema secundario consiste en una serie de  $n$  péndulos unidos al sistema principal, al hacer la comparación se muestra claramente un rango de frecuencias efectivo de absorción de vibraciones mucho mayor en comparación con el de un solo amortiguador de vibraciones pendular. Por lo tanto, se puede aumentar el ancho de banda de efectividad sustancialmente mediante el uso de péndulos con frecuencias ligeramente diferentes [5].

H. Jo, H Yabuno (2010). Se usó un método de reducción de amplitud para la resonancia paramétrica con un tipo de vibración dinámica que utiliza un acoplamiento cuadrático no lineal, con un sistema simétrico no lineal restaurador de fuerza y armónico causante de excitación de resonancia en el sistema, la frecuencia natural está sintonizada para estar en el doble que la del sistema principal, el sistema tiene un absorbedor de vibraciones tipo péndulo, la resonancia paramétrica se estabiliza

por el efecto tanto de la vibración absorbente como de la fricción de Coulomb, se consideran los sistemas principales sometidos a fuerzas magnéticas con una fuerza de restauración no lineal. En los resultados analíticos se muestra una reducción de la amplitud de la resonancia paramétrica muy cercana a cero, los parámetros del sistema influyen en la eficiencia del sistema, teniendo mejor resultado al tener una mayor longitud del absorbedor y la masa del sistema, obteniendo más eficiencia en la masa del absorbedor [6].

S. Wu, Y. Chen, S. Wang (2010). Se propuso el análisis de resultados de un péndulo rotacional absorbedor de vibraciones (RPA, por sus siglas en inglés), las frecuencias características del absorbedor pueden ser ajustadas dinámicamente ajustando la velocidad de rotación. El dispositivo se acopló al sistema principal a través de un resorte mecánico, poseyendo así dos modos naturales de vibración en el plano vertical. El RPA consiste en un par de péndulos simétricos impulsados por un motor eléctrico, aprovechando el grado de libertad adicional proporcionado por el acoplador de resorte, se puede detectar la condición de absorción a través de la estimación de fase y el ajuste de la velocidad de rotación según corresponda, para un estudio posterior se podría incluir un algoritmo para el ajuste de velocidad [7].

M. R. Gutiérrez, G. S. Navarro (2013). Se probó la atenuación de vibraciones mecánicas en una estructura tipo edificio de tres niveles usando dos actuadores diferentes, se consideró el uso de un parche y un actuador piezoeléctricos modelo FPA-110 colocados en la base de la estructura, se utilizó el uso de retroalimentación positiva de la aceleración (PAF, por sus siglas en inglés) y se implementó con varios absorbedores pasivos virtuales sintonizados en las diferentes frecuencias resonantes del sistema. Con base a la validación experimental y el modelo de la estructura por elemento finito, se obtuvieron atenuaciones de hasta el 58%, teniendo grandes ventajas en la atenuación de vibraciones en estructuras mecánicas utilizando esfuerzos de control y consumo de potencia muy pequeños [2].

K. Majcher, Z. Wójcicki (2013). Se realizó un análisis numérico en consideración a el problema de investigación de la vibración de un edificio alto con un péndulo en configuración TMD, se asumió que durante un terremoto la excitación cinemática del suelo puede moverse tanto horizontal como vertical, por lo que el modelo con péndulo TMD, se excitó tanto vertical como de forma horizontal descrito por su matriz lineal diferencial como con su matriz de rigidez, se respaldó

realizado por análisis numérico, mostrando la convergencia entre la respuesta dinámica de la estructura y los cálculos numéricos 3D cuya ecuación es descrita por ecuaciones de parámetros lineales [8].

J. E. Zárate, G. S. Navarro (2014). Se consideró una estructura tipo edificio de tres niveles, con excitación armónica y sísmica por un registro real de este tipo con magnitud 8.1Mw, la cual se controló con un absorbedor de vibraciones TMD pasivo/activo y leyes de control basadas en múltiple retroalimentación positiva de la posición (MPPF, por sus siglas en inglés), en combinación con la técnica de control por modos deslizantes, para mejorar la robustez y minimización de la respuesta dinámica del sistema, validado mediante resultados en simulación y experimentales. Se encontraron resultados satisfactorios, ya que los esquemas de control atenúan altamente la respuesta del sistema, utilizando pequeños esfuerzos de control y recurriendo únicamente a la retroalimentación de la posición del TMD [9].

D. A. Flores et al (2017). Se desarrolló una comparación teórica-numérica relacionada con el control pasivo/activo de vibraciones en una estructura tipo edificio de un piso usando un absorbente pendular implementado en dos configuraciones diferentes tanto de rotación en el plano vertical y rotación en el plano horizontal, implementando excitación sinusoidal en la base. En los resultados se observó que en comparación con el absorbente pendular configurado como amortiguador de masa sintonizada (TMD, por sus siglas en inglés) solo funciona en su frecuencia de sintonización y no da lugar a grandes amplitudes de resonancia a diferentes frecuencias, pero tiene la ventaja de que el tiempo de sintonización es menor comparado con el caso autoparamétrico [3].

H. F. Abundis-Fong et al (2018). Se describió el diseño óptimo de un absorbedor de vibraciones autoparamétrico (tipo viga en cantiléver) pasivo aplicado a un sistema mecánico lineal en condiciones resonantes cercanas a la frecuencia natural del sistema primario. En los resultados se concluyó que la comparación experimental mostró que el absorbedor no lineal con los parámetros óptimos tiene el mejor rendimiento para la disipación de energía externa suministrada al sistema primario, por otro lado, se consideró que el absorbedor no lineal necesitaría mejorar la respuesta transitoria del sistema primario, porque esta es una desventaja de los absorbedores autoparamétricos en comparación con los convencionales TMD [4].

K. Krzysztof (2020). Se estudió el uso del péndulo autoparamétrico clásico, para la reducción de vibraciones simultáneas a la recuperación de energía, el sistema de amortiguador de vibraciones se modifica añadiendo un sistema de cosechador de energía, que puede mejorar el efecto de mitigación de vibración, el sistema se describe como un modelo nuevo polinomial no lineal, el modelo tiene en cuenta la configuración entre el imán y el inductor. El enfoque muestra que la posición del imán influye ligeramente en soluciones inestables, para las cuales encontrar un área de compromiso satisfactoria para la absorción de vibraciones y la recolección de energía es difícil. Se encuentran resultados de inestabilidad paramétrica para un rango amplio del sistema, la región de interés está ubicada para las frecuencias bajas cerca de la resonancia principal, para la cual se satisfacen las condiciones deseadas. [10].

## 2.2 Estructura más icónica con amortiguador de vibraciones, Edificio de Taipéi.

El edificio Taipéi es uno de los edificios más altos del mundo, se encuentra en Taipéi, Taiwán; su construcción inició en 1999 y finalizó en 2004, mide 508 m de altura. El edificio tiene 5 pisos de subterráneo que sirven de aparcamiento. Taiwán se ubica sobre una falla geológica, por ende, está sometido a sismos.

Para prevenir la oscilación de la estructura provocada por ráfagas de aire, se consideró implementar un disipador de vibraciones.

La estructura cuenta con un amortiguador de masa sintonizada o TMD (por sus siglas en inglés), de 660 Mg (726 toneladas). Su masa es igual al 0.24 por ciento de la masa total del edificio, se encuentra por encima del nivel 88 (ver Figura 2) [11].

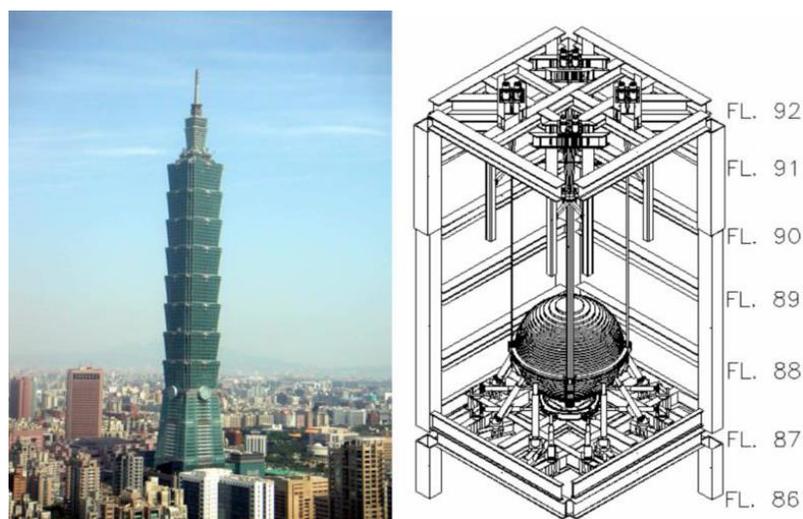


Figura 2 Edificio Taipéi 101 – Taiwán [11].

### 3. Marco teórico

Para una mejor comprensión del tema es necesario tomar en cuenta algunos conceptos que tienen una relación estrecha con el desarrollo del proyecto, cada uno de éstos se presenta a continuación:

#### 3.1 Vibración u oscilación

Es el movimiento que se repite en un intervalo de tiempo en un sistema [12]. La vibración de un sistema implica la transformación de su energía potencial en energía cinética y de ésta en energía potencial. Si el sistema se amortigua, una parte de su energía se disipa en cada ciclo de vibración y se le debe reemplazar por una fuente externa para que se mantenga un estado de vibración estable [13].

#### 3.2 Grados de libertad del sistema

Es el número mínimo de coordenadas independientes requerido para determinar por completo todas las partes de un sistema en cualquier instante de tiempo [12]. Se dice que un sistema mecánico tiene un grado de libertad, si podemos expresar su posición geométrica en cualquier instante mediante un solo número. Sea por ejemplo un peso suspendido de un resorte, de tal suerte que se vea restringido por guías que le permitan desplazarse solamente en dirección vertical, el cual es un sistema típico de vibraciones con un solo grado de libertad (ver Figura 3).

En general, podemos decir que, si para especificar la posición de un sistema mecánico se requieren  $n$  números, el sistema tiene  $n$  grados de libertad [14].

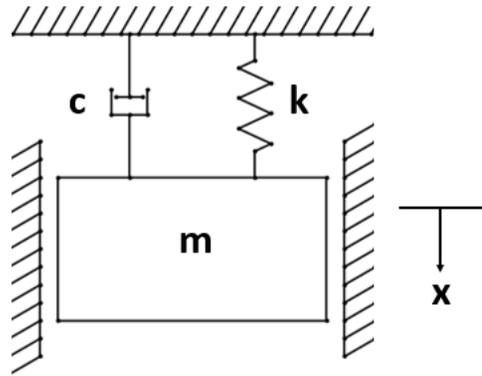


Figura 3 Sistema vibratorio fundamental de un grado de libertad.

### 3.3 Componentes básicos de un sistema vibratorio

Considere una masa  $m$  suspendida de un techo rígido por medio de un resorte como se muestra en la Fig. 3. La *rigidez* del resorte está dada por su constante de resorte  $k$ . Entre la masa y la pared rígida hay también un amortiguador de aire o aceite. Se supone que este no transmite fuerza alguna a la masa siempre y cuando esté en reposo; pero, tan pronto como se mueve la masa, la fuerza de amortiguamiento del mecanismo es  $c\dot{x}$  o  $c \frac{dx}{dt}$ , es decir proporcional a la velocidad y en dirección opuesta. La magnitud de  $c$  se conoce como *coeficiente de amortiguamiento viscoso* [14].

### 3.4 Modelo dinámico

Es la representación de todos los detalles importantes de un sistema con el objetivo de derivar las ecuaciones matemáticas que rigen su comportamiento físico [12]. De cualquier estructura física se puede obtener la aproximación de un modelo en forma de un número de resortes (representando la rigidez del sistema), masas y amortiguadores. Podemos tomar como ejemplo una viga en voladizo, la cual se puede representar de forma equivalente a través del uso de masas y resortes, para una mejor visualización se hace la representación en la Figura 4.

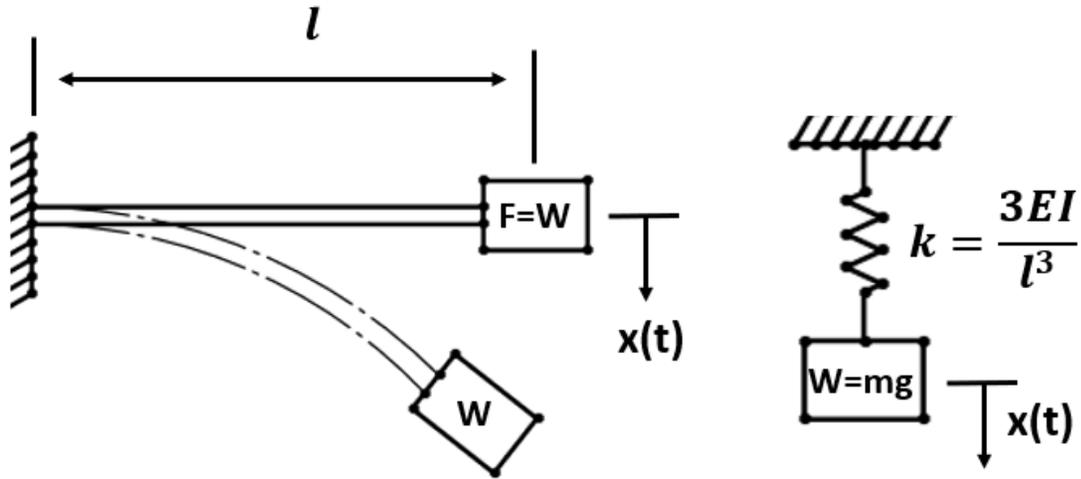


Figura 4 Viga en voladizo con un peso aplicado en el extremo y su representación equivalente.

Por lo que se puede saber que su ecuación diferencial que describe la dinámica del modelo está dada por

$$m\ddot{x} + \frac{3EI}{l^3}x = 0 \quad (1)$$

### 3.5 Frecuencia natural

Si se perturba un sistema resorte-masa (de 1 gdl) en sus condiciones iniciales, el sistema vibrará a su frecuencia natural. La frecuencia natural de un sistema masa-resorte no amortiguado se da en la siguiente ecuación:

$$\omega_n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (2)$$

donde  $\omega_n$  es la frecuencia natural [Hz],  $k$  es la constante de rigidez (N/m) y  $m$  (kg) es la masa del sistema.

De la ecuación (2), se observa que, si la rigidez aumenta, la frecuencia natural también aumentará, y si la masa aumenta, la frecuencia natural disminuye.

### 3.6 Vibración libre con amortiguamiento viscoso

La fuerza de amortiguamiento viscoso  $F$  es proporcional a la velocidad  $\dot{x}$  o  $v$  y se expresa como

$$F = -c\dot{x} \quad (3)$$

donde  $c$  es la constante de amortiguamiento o coeficiente de amortiguamiento viscoso y el signo indica que la fuerza de amortiguamiento se opone a la dirección de la velocidad. En la Figura 5 se muestra un sistema de un solo grado de libertad con un amortiguador viscoso. Si  $x$  se mide a partir de la posición de equilibrio de la masa  $m$ , la aplicación de la ley de Newton da por resultado la ecuación de movimiento:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \quad (4)$$

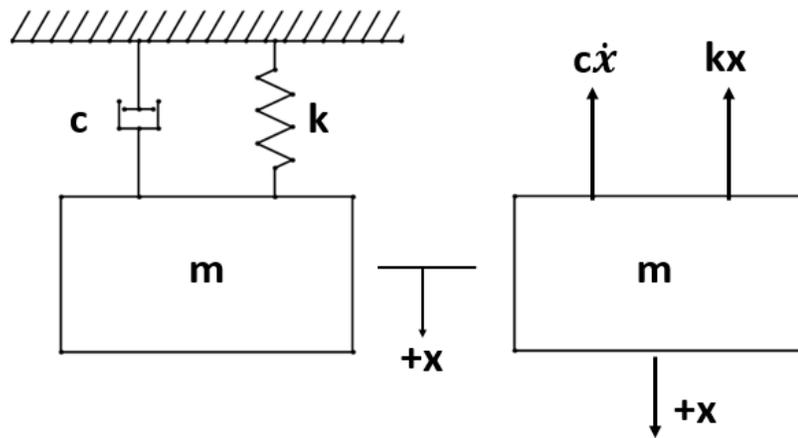


Figura 5 Sistema de un grado de libertad con amortiguamiento viscoso.

Mediante un cambio de variable de la ecuación (4) nos lleva a la ecuación característica

$$ms^2 + cs + k = 0 \quad (5)$$

Cuyas raíces son:

$$s_{1,2} = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m} = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}} \quad (6)$$

### Constante de amortiguamiento crítico y la relación de amortiguamiento.

El amortiguamiento crítico  $c_c$  se define como el valor de la constante de amortiguamiento  $c$  con la cual el radical en la ecuación (6) se vuelve cero, como se muestra en la ecuación (7):

$$\left(\frac{c_c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m} = 0 \quad (7)$$

Despejando la constante de amortiguamiento crítico se tiene

$$c_c = 2m \sqrt{\frac{k}{m}} = 2\sqrt{km} = 2m\omega_n \quad (8)$$

Para cualquier sistema amortiguado, la relación de amortiguamiento  $\zeta$  se define como la relación de la constante de amortiguamiento a la constante de amortiguamiento crítico:

$$\zeta = \frac{c}{c_c} \quad (9)$$

Utilizando las ecuaciones (8) y (9), podemos escribir

$$\frac{c}{2m} = \left(\frac{c}{c_c}\right) \left(\frac{c_c}{2m}\right) = \zeta\omega_n \quad (10)$$

Y, por consiguiente

$$s_{1,2} = \left(-\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1}\right) \omega_n \quad (11)$$

Así, la solución, ecuación (4), se escribe como

$$x(t) = C_1 e^{(-\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t} + C_2 e^{(-\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t} \quad (12)$$

donde  $C_1$  y  $C_2$  son constantes arbitrarias que se tienen que determinar a partir de las condiciones iniciales del sistema.

### **Caso de estudio necesario para el sistema actual.**

*Sistema sub-amortiguado* ( $\zeta < 1$ ). En esta condición ( $\zeta^2 - 1$ ) es negativa y las raíces  $s_1$  y  $s_2$  se expresan como

$$s_1 = \left(-\zeta + i\sqrt{1 - \zeta^2}\right) \omega_n$$

$$s_2 = \left(-\zeta - i\sqrt{1 - \zeta^2}\right) \omega_n$$

y la solución, la ecuación (12), se puede escribir:

$$x(t) = C_1 e^{(-\zeta + i\sqrt{1 - \zeta^2})\omega_n t} + C_2 e^{(-\zeta - i\sqrt{1 - \zeta^2})\omega_n t}$$

En las condiciones iniciales  $x(t = 0) = x_0$  y  $\dot{x}(t = 0) = \dot{x}_0$ ,  $C_1$  y  $C_2$ , se determinan como sigue:

$$C_1 = x_0 \quad y \quad C_2 = \frac{\dot{x}_0 + \zeta \omega_n x_0}{\sqrt{1 - \zeta^2} \omega_n} \quad (13)$$

y por consiguiente la solución es

$$x(t) = x_0 e^{(-\zeta + i\sqrt{1-\zeta^2})\omega_n t} + \frac{\dot{x}_0 + \zeta \omega_n x_0}{\sqrt{1 - \zeta^2} \omega_n} e^{(-\zeta - i\sqrt{1-\zeta^2})\omega_n t} \quad (14)$$

U otra forma de expresarse como

$$x(t) = e^{-\zeta \omega_n t} \left\{ x_0 \text{Cos} \sqrt{1 - \zeta^2} \omega_n t + \frac{\dot{x}_0 + \zeta \omega_n x_0}{\sqrt{1 - \zeta^2} \omega_n} \text{Sen} \sqrt{1 - \zeta^2} \omega_n t \right\} \quad (15)$$

El movimiento descrito por la ecuación (15) es un movimiento armónico amortiguado de frecuencia angular  $\sqrt{1 - \zeta^2} \omega_n$ , pero debido al factor  $e^{-\zeta \omega_n t}$  la amplitud disminuye exponencialmente con el tiempo.

El siguiente factor se conoce como *frecuencia de vibración amortiguada*.

$$\omega_d = \sqrt{1 - \zeta^2} \omega_n \quad (16)$$

### 3.7 Vibración forzada no amortiguada sometida a una fuerza armónica

Si una fuerza  $F(t) = F_0 \text{Cos } \omega t$  actúa en la masa  $m$  de un sistema no amortiguado, la ecuación de movimiento, ecuación (4), se reduce a

$$m\ddot{x} + kx = F_0 \text{Cos } \omega t \quad (17)$$

La solución homogénea de esta ecuación está dada por

$$x_h(t) = C_1 \text{Cos } \omega_n t + C_2 \text{Sen } \omega_n t \quad (18)$$

donde  $\omega_n = (k/m)^{1/2}$  es la frecuencia natural del sistema. Como la fuerza de excitación  $F(t)$  es armónica, la solución particular  $x_p(t)$  también es armónica, y tiene la misma frecuencia  $\omega$ . Por lo tanto, suponemos una solución de la forma

$$x_p(t) = X \text{Cos } \omega t \quad (19)$$

donde  $X$  es una constante que indica la amplitud máxima de  $x_p(t)$ . Sustituyendo la ecuación (19) en la ecuación (17) y resolviendo  $X$ , obtenemos

$$X = \frac{F_0}{k - m\omega^2} \quad (20)$$

Por lo tanto, la solución total de la ecuación (17) es

$$x(t) = C_1 \cos \omega_n t + C_2 \operatorname{Sen} \omega_n t + \frac{F_0}{k - m\omega^2} \cos \omega t \quad (21)$$

Utilizando las condiciones iniciales  $x(t = 0) = x_0$  y  $\dot{x}(t = 0) = \dot{x}_0$ , vemos que

$$C_1 = x_0 - \frac{F_0}{k - m\omega^2}, \quad C_2 = \frac{\dot{x}_0}{\omega_n} \quad (22)$$

y, por consiguiente

$$x(t) = \left( x_0 - \frac{F_0}{k - m\omega^2} \right) \cos \omega_n t + \left( \frac{\dot{x}_0}{\omega_n} \right) \operatorname{Sen} \omega_n t + \frac{F_0}{k - m\omega^2} \cos \omega t \quad (23)$$

### 3.8 Resonancia

Es una condición dinámica que se presenta cuando la frecuencia de la fuerza de excitación coincide con una de las frecuencias naturales del sistema, por lo tanto, se presentarán oscilaciones peligrosamente grandes que pueden generar la falla del sistema [12].

### 3.9 Control de vibración

En muchas situaciones prácticas, es posible reducir mas no eliminar las fuerzas dinámicas que provocan vibraciones. Se pueden utilizar varios métodos para controlar vibraciones. Entre ellos, los siguientes son importantes:

1. Cambio de las frecuencias naturales del sistema y evitar la resonancia bajo excitaciones externas.
2. Impedir la respuesta excesiva del sistema, incluso en resonancia, con la introducción de amortiguamiento o un mecanismo disipador de energía.
3. Reducir la transmisión de las fuerzas de excitación de una parte del sistema a otra por medio de aisladores de vibración.
4. Reducir la respuesta del sistema con la adición de un neutralizador de masa auxiliar o absorbedor de vibración.

A continuación, consideraremos los detalles de estos métodos [13].

### **3.9.1. Cambio de las frecuencias naturales**

En la mayoría de los sistemas mecánicos y estructurales, los grandes desplazamientos indican esfuerzos y deformaciones indeseablemente grandes, los cuales pueden provocar la falla del sistema. De ahí que en cualquier sistema se deben evitar las condiciones de resonancia. En la mayoría de los casos, la frecuencia de excitación se puede controlar, porque es impuesta por requerimientos funcionales del sistema o máquina. Debemos concentrarnos en modificar las frecuencias naturales del sistema para evitar la resonancia.

Como indica la ecuación (2), la frecuencia natural de un sistema se puede cambiar variando ya sea la masa  $m$  o la rigidez  $k$ . En muchos casos prácticos, sin embargo, la masa no se puede cambiar con facilidad, puesto que su valor está determinado por los requerimientos funcionales del sistema. Por ejemplo, la masa de un volante en una flecha está determinada por la cantidad de energía que debe almacenar en un ciclo. Por consiguiente, la rigidez del sistema es el factor que con más frecuencia se cambia para modificar sus frecuencias naturales. Por ejemplo, la rigidez de una flecha rotatoria se puede modificar variando uno o más de sus parámetros, como los materiales o la cantidad y ubicación de los puntos de soporte (rodamientos).

### **3.9.2. inyección de amortiguamiento**

La presencia de amortiguamiento es útil en muchos casos. En sistemas como amortiguadores de automóviles y muchos instrumentos de medición de vibración, se debe introducir amortiguamiento para satisfacer los requerimientos funcionales.

Si el sistema experimenta vibración forzada, su respuesta o amplitud de vibración tiende a incrementarse cerca de la resonancia si no hay amortiguamiento. La presencia de amortiguamiento siempre limita la amplitud de vibración. Si se conoce la frecuencia forzada, puede ser posible evitar la resonancia cambiando la frecuencia natural del sistema. Sin embargo, quizá se requiera que el sistema o máquina opere dentro de varios rangos de velocidad, como en el caso de un motor eléctrico de velocidad variable o un motor de combustión interna. Tal vez no se pueda evitar la resonancia en todas las condiciones de operación. En tales casos, podemos introducir amortiguamiento en el sistema para controlar su respuesta, utilizando materiales estructurales de alto amortiguamiento interno, como hierro colado o materiales laminados.

### 3.9.3. Aislamiento de la vibración

Básicamente, implica la inserción de un miembro elástico (o aislador) entre la masa vibratoria (equipo o carga útil) y la fuente de vibración de modo que se logre una reducción de la respuesta dinámica del sistema sometido a condiciones específicas de excitación por vibración. Se dice que un sistema de aislamiento es activo o pasivo según si se requiere o no potencia externa para que el aislador realice su función. Un aislador pasivo se compone de un miembro elástico (rigidez) y un disipador de energía (amortiguamiento). Algunos ejemplos de aisladores pasivos comprenden resortes metálicos, corcho, fieltro, resortes neumáticos y resortes elastómeros (caucho). Un aislador activo se compone de un servomecanismo con un sensor, un procesador de señales y un actuador.

El aislamiento de vibración se puede utilizar en dos tipos de situaciones. En el primer tipo, el cimientado o base de una máquina vibratoria se protege contra grandes fuerzas desbalanceadas. En el segundo tipo, el sistema se protege contra el movimiento de su cimientado o base.

El primer tipo de aislamiento se utiliza cuando una masa (o máquina) se somete a las fuerzas desbalanceadas inherentes se transmiten a la base o cimientado de la máquina. En tales casos, la fuerza transmitida a la base,  $F(t)$  varía armónicamente, y los esfuerzos resultantes en los pernos también varían armónicamente, lo que podría provocar fallas por fatiga. Incluso si la fuerza no es armónica, su magnitud se tiene que limitar a valores permisibles seguros. En estas aplicaciones podemos insertar un aislador (en la forma de rigidez y/o amortiguamiento) entre la masa sometida a una fuerza o excitación y la base o cimientado para reducir la fuerza transmitida a la base o cimientado.

El segundo tipo de aislamiento se utiliza cuando se tiene que proteger una masa contra el movimiento o excitación de su base o cimientado. Cuando una máquina se atornilla directamente en un cimientado o piso rígido, el cimientado se verá sometido a una carga armónica debido al desbalance en la máquina, además de la carga estática originada por el peso de la máquina. De ahí que se coloca un miembro elástico entre la máquina y el cimientado rígido para reducir la fuerza transmitida al cimientado. Se supone que el miembro elástico tiene tanto elasticidad como amortiguamiento y se modela como un resorte  $k$  y un amortiguador hidráulico  $c$ .

### 3.10 Análisis de una estructura tipo edificio discretizada en un grado de libertad sometida a movimiento armónico en la base

En esta sección se hace énfasis en el sistema principal al cual se desea controlar su amplitud de oscilación al vibrar considerándolo como un sistema masa-resorte-amortiguador con un desplazamiento de tipo senoidal en la base. Sea  $y(t)$  el desplazamiento de la base y  $x(t)$  el desplazamiento de la masa con respecto a su posición de equilibrio estático en el tiempo  $t$ . Entonces el alargamiento neto del resorte es  $x - y$ , y la velocidad relativa entre los dos extremos del amortiguador es  $\dot{x} - \dot{y}$ . Del diagrama de cuerpo libre que se muestra en la Figura 6, obtenemos la ecuación de movimiento:

$$m\ddot{x} + c(\dot{x} - \dot{y}) + k(x - y) = 0 \quad (24)$$

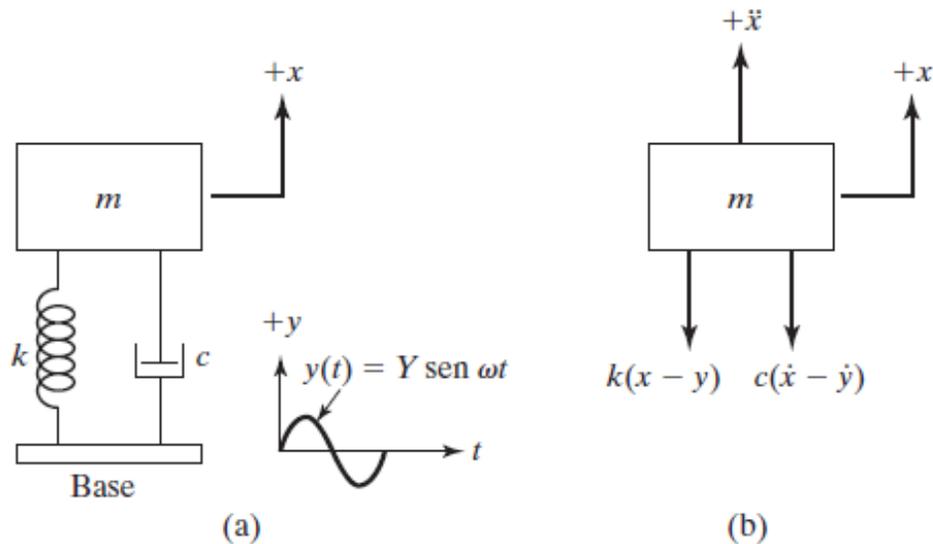


Figura 6 Sistema masa-resorte-amortiguador con excitación en la base [13].

Si  $y(t) = Y \text{ sen } \omega t$ , la ecuación (24) se escribe como

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = ky + c\dot{y} = kY \text{ sen } \omega t + c\omega Y \text{ cos } \omega t = A \text{ sen } (\omega t + \alpha) \quad (25)$$

donde  $A = Y\sqrt{k^2 + (c\omega)^2}$  y  $\alpha = \tan^{-1} \left[ -\frac{c\omega}{k} \right]$ . Esto demuestra que excitar la base equivale a aplicar una fuerza armónica de magnitud  $A$  en la masa [13]. Resolviendo la ecuación, la respuesta en estado estable de la masa,  $x_p(t)$ , se puede expresar como

$$x_p(t) = \frac{Y\sqrt{k^2 + (c\omega)^2}}{[(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2]^{1/2}} \text{sen}(\omega t - \phi_1 - \alpha) \quad (26)$$

donde

$$\phi_1 = \tan^{-1} \left[ \frac{c\omega}{k - m\omega^2} \right]$$

### 3.11 Análisis de espectro

El análisis de espectros que se define como la transformación de una señal de la representación en el dominio del tiempo hacia la representación en el dominio de la frecuencia, tiene sus raíces a principio del siglo XIX, cuando varios matemáticos lo investigaron desde una base teórica. Pero fue un hombre práctico, un ingeniero con una educación matemática, que desarrolló la teoría en que están basadas casi todas nuestras técnicas modernas de análisis de espectro. Este ingeniero fue Jean Baptiste Fourier. Él estaba trabajando para Napoleón, durante la invasión de Egipto en un problema de sobrecalentamiento de cañones, cuando dedujo la famosa Serie de Fourier, para la solución de la conducción de calor. Puede parecer que hay una gran distancia entre cañones sobrecalentados y análisis de frecuencia, pero resulta que las mismas ecuaciones son aplicables en los dos casos. Fourier más tarde generalizó la Serie de Fourier en la Transformada Integral de Fourier. La llegada del análisis de las señales digitales naturalmente llevó a la llamada Transformada Discrecional de Fourier y la Transformada Rápida de Fourier o FFT (por sus siglas en inglés) [12].

### 3.12. Absorbedor de vibración

También llamado absorbedor dinámico de vibración (DVA, por sus siglas en inglés) es un dispositivo mecánico que se utiliza para reducir o eliminar la vibración indeseable. Se compone de otra masa y rigidez anexadas a la masa principal (original) que tiene que ser protegida contra vibración. Por lo tanto, la masa del absorbedor anexada constituye un sistema de dos grados de libertad, de ahí que el sistema completo tenga dos frecuencias naturales. El absorbedor de vibración se utiliza comúnmente en estructuras y maquinaria que son perturbadas u operan en valores de velocidad constante, porque el absorbedor de vibración se sintoniza a una frecuencia particular y es efectivo solo dentro de una banda angosta de frecuencias. El absorbedor de vibración ayuda a

balancear las fuerzas recíprocas. Sin un absorbedor de vibración, las fuerzas recíprocas desbalanceadas podrían hacer que el dispositivo principal fuera imposible de mantener o controlar.

Una máquina o sistema puede experimentar vibración excesiva si en ella actúa una fuerza cuya frecuencia de excitación casi coincide con una frecuencia natural de la máquina o sistema. En tales casos, la vibración de la máquina o sistema se puede reducir por medio de un neutralizador de vibración o absorbedor de vibración dinámica, el cual es simplemente otro sistema de resorte-masa. El absorbedor de vibración dinámica se diseña de modo que las frecuencias naturales del sistema resultante se alejen de la frecuencia de excitación [13].

Considerando el análisis de un absorbedor de vibración dinámico idealizando la máquina como un sistema de un solo grado de libertad. Se acopla una masa auxiliar  $m_2$  en una máquina  $m_1$  mediante resorte de rigidez  $k_2$ , y el sistema de dos grados de libertad se presenta como se muestra en la Figura 7. Las ecuaciones de movimiento del sistema completo son:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + k_1 x_1 + k_2 (x_1 - x_2) &= F_0 \text{sen } \Omega t \\ m_2 \ddot{x}_2 + k_2 (x_2 - x_1) &= 0 \end{aligned} \quad (27)$$

Suponiendo una solución armónica,

$$x_j(t) = X_j \text{sen } \omega t, \quad j = 1, 2 \quad (28)$$

Obteniendo las amplitudes de estado estable de masas  $m_1$  y  $m_2$  como:

$$X_1 = \frac{(k_2 - m_2 \omega^2) F_0}{(k_1 + k_2 - m_1 \omega^2)(k_2 - m_2 \omega^2) - k_2^2} \quad (29)$$

$$X_2 = \frac{k_2 F_0}{(k_1 + k_2 - m_1 \omega^2)(k_2 - m_2 \omega^2) - k_2^2} \quad (30)$$

Ya que lo que nos interesa es sobre todo la reducción de la amplitud de la máquina ( $X_1$ ), para reducir a cero la amplitud de  $m_1$ , el numerador de la ecuación (29) debe hacerse igual a cero. Por lo tanto, resulta:

$$\omega^2 = \frac{k_2}{m_2} \quad (31)$$

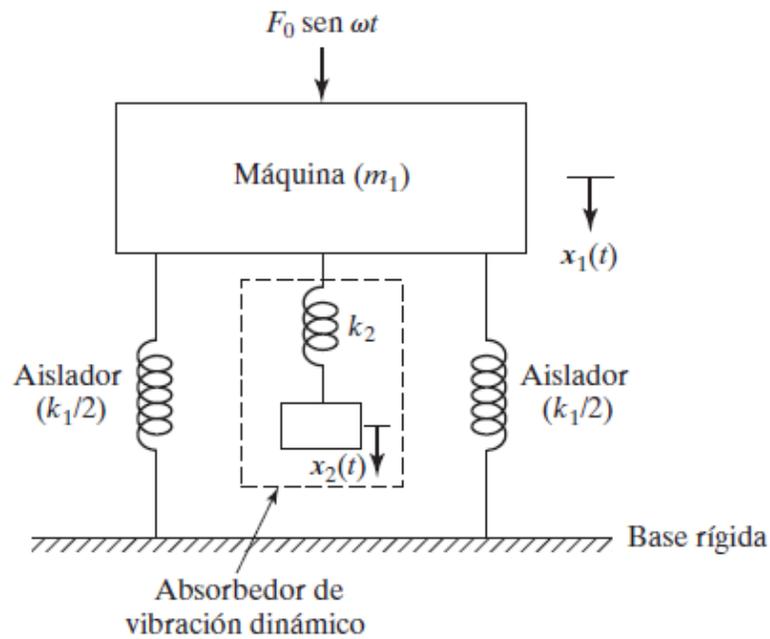


Figura 7 Absorbedor de vibración dinámico no amortiguado [13].

### 3.13 Uso del Formalismo de Euler-Lagrange para derivar ecuaciones de movimiento

Las ecuaciones de movimiento de un sistema vibratorio se pueden derivar de una forma sencilla en función de coordenadas generalizadas mediante las ecuaciones de Lagrange. Ésta se formula para un sistema de  $n$  grados de libertad como:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} + \frac{\partial V}{\partial q_j} = Q_j^{(n)}, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (32)$$

Donde  $\dot{q}_j = \frac{d}{dt}(q_j)$  es la velocidad generalizada

$Q_j^{(n)}$  = es la fuerza generalizada no conservadora

$q_j$  es la coordenada generalizada

V es la energía potencial del sistema

T es la energía cinética de sistema

### **3.14 La Transformada Discreta de Fourier (TDF)**

La TDF opera con una señal de muestras-o discreta- en el dominio del tiempo. A partir de esta se genera un espectro de muestras -o discreto- en el dominio de la frecuencia. El espectro que resulta es una aproximación de la Serie de Fourier. La clave hacia la TDF es la existencia de una forma de onda de la que se tomaron muestras, esto es la posibilidad de representar la forma de onda en una serie de números. Para generar esta serie de números desde una señal análoga, se requiere un procedimiento de muestreo, y de conversión de análogo a digital. La señal de la que se tomaron muestras es una representación matemática del nivel de la señal instantánea a intervalos definidos con precisión.

Si la proporción de muestreo es lo suficientemente alta como para asegurar una representación razonable de la forma de la señal, la TDF si produce un espectro que es muy similar a un espectro teóricamente verdadero [12].

### **3.15 La Transformada Rápida de Fourier (FFT)**

Para adaptar la TDF para uso con computadoras digitales, la llamada Transformada Rápida de Fourier fue desarrollada. La FFT es un algoritmo para calcular la TDF de manera rápida y eficaz.

Son Cooley y Tuckey que fueron acreditados con el descubrimiento de la FFT en 1967, pero ya existía desde antes, aunque sin las computadoras que se necesitaban para explotar dicha herramienta [12].

### **3.16 Análisis modal experimental**

El análisis modal experimental, también conocido como análisis o prueba modales, se refiere a la determinación de frecuencias naturales, relaciones de amortiguamiento y patrones de deformación por medio de una prueba de vibración [13].

La medición de vibración requiere el siguiente equipo:

- 1.** Un excitador o fuente de vibración para aplicar una fuerza de entrada conocida a la estructura o máquina.

2. Un transductor para convertir el movimiento físico de la estructura o máquina, en una señal eléctrica.
3. Un amplificador de acondicionamiento de señal para hacer las características del transductor compatibles con la electrónica de entrada del sistema de adquisición de datos digital.
4. Un analizador para realizar las tareas de procesamiento de señales y análisis modal mediante un programa de computadora apropiado.

### 3.17 Método de Peak Picking

El enfoque es comparar la región de resonancia con una función de transferencia analítica de un sistema amortiguado de un solo grado de libertad.

Hay que tener en cuenta que cuando el nivel de amortiguamiento es pequeño, se puede suponer (aproximadamente) que la resonancia está en la frecuencia natural no amortiguada  $\omega_n = \sqrt{k/m}$ . En general, el valor de la función de transferencia depende de la constante de amortiguamiento y de la frecuencia natural. Como  $\omega_n$  se conoce directamente a partir de la ubicación máxima de la función de transferencia es posible calcular la constante de amortiguamiento  $c$  (o relación de amortiguamiento  $\zeta$ ) determinando primero la magnitud pico correspondiente.

El procedimiento para usar el método de selección de picos es [15]:

- a) Estimación de la frecuencia natural

La frecuencia natural se identifica a partir del valor pico de la FFT como  $\omega_n = \omega_{pico}$

- b) Estimación del amortiguamiento

Para estimar el amortiguamiento, los puntos de media potencia en  $\omega_a$  y  $\omega_b$  se ubican primero desde cada lado del pico. La relación de amortiguamiento se puede estimar a partir del ancho del pico de resonancia como:

$$\zeta = \frac{\omega_b^2 - \omega_a^2}{4\omega_n^2} \approx \frac{\omega_b - \omega_a}{2\omega_n} \quad (33)$$

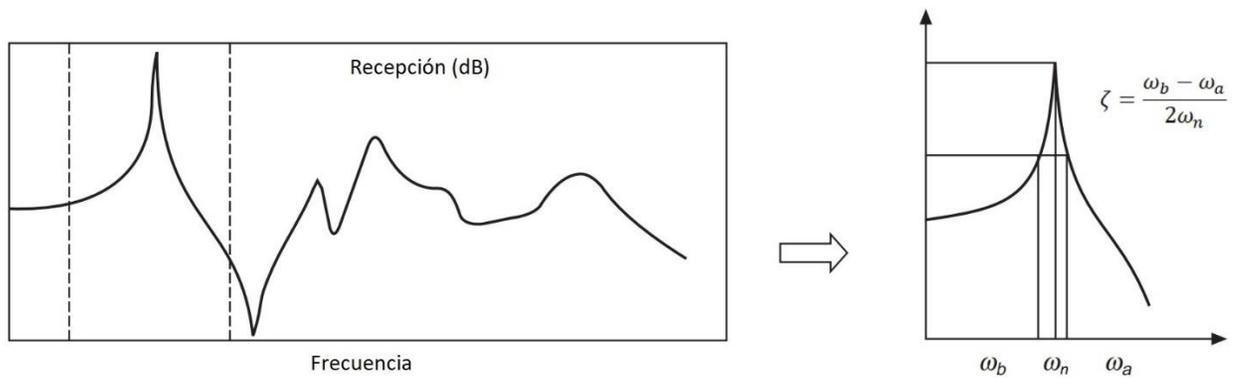


Figura 8 Metodo Peak-Picking [15].

Se vuelve no funcional cuando el sistema está altamente amortiguado (o sobreamortiguado), o cuando la amortiguación es 0 (pico infinito). Es un enfoque rápido que es apropiado para evaluaciones preliminares y solución de problemas [16].

### 3.18 Método de elemento finito

Es un método numérico que se puede utilizar para la solución de problemas de vibración estructural y mecanismos complejos. En este método, a la estructura original la reemplazan varias piezas o elementos, de los cuales se supone que se comportan como un miembro estructural continuo llamado elemento finito. Se supone que los elementos están interconectados en ciertos puntos llamados juntas o nodos. Como es muy difícil determinar la solución exacta de la estructura original bajo las cargas específicas, se supone una solución aproximada conveniente en cada elemento finito. La idea es que, si las soluciones de los diversos elementos se seleccionan adecuadamente, se puede hacer que converjan en la solución exacta de la estructura total a medida que el tamaño del elemento se reduce. Durante el proceso de la solución, el equilibrio de fuerzas en las juntas y la compatibilidad de los desplazamientos entre los elementos se satisfacen, de modo que toda la estructura se comporte como una sola entidad [13].

### 3.19 Vibraciones no lineales

La linealidad con absoluta perfección no existe en ningún sistema real. Hay muchos tipos diferentes de no linealidad y existe en varios grados en todos los sistemas mecánicos, aunque muchos sistemas actuales se acercan a un comportamiento lineal, especialmente con niveles de energía pequeños. Si un sistema no es lineal producirá frecuencias en su salida, que no existen en su entrada [12]. Como

los sistemas vibratorios tienden a comportarse no linealmente con amplitud de oscilación creciente, es deseable un conocimiento de la vibración no lineal cuando se trate con sistemas vibratorios [13].

En la mayoría de las aplicaciones industriales los absorbedores dinámicos de vibraciones deben interactuar con sistemas mecánicos no-lineales, situación que ciertamente complica el análisis dinámico y frecuencial. De hecho, en algunas aplicaciones un absorbedor no lineal puede ofrecer algunas ventajas, con respecto a su contraparte lineal.

Las ecuaciones diferenciales que rigen el comportamiento de sistemas vibratorios no lineales son asimismo no lineales. Si la vibración es no lineal, el principio de superposición no es válido y las técnicas de análisis son poco conocidas [13].

Se dice que una ecuación diferencial es lineal si tiene la forma:

$$a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x) \quad (34)$$

Si una ecuación es lineal, entonces es necesario que cumpla con las siguientes características [17]:

1. La variable dependiente  $y$ , junto con todas sus derivadas, son de primer grado.
2. Los coeficientes tanto de  $y$  como de sus derivadas dependen solo de la variable independiente  $x$ .
3. El segundo miembro es una función de  $x$ .

### 3.20 Sistemas autoparamétricos

Los sistemas autoparamétricos son sistemas vibratorios constituidos por al menos dos subsistemas. Uno de ellos, el sistema primario, generalmente permanecerá en estado vibratorio. Este sistema primario puede estar excitado mediante una fuerza externa, de forma paramétrica, auto excitado o con una combinación de los anteriores. Los sistemas secundarios se acoplan al sistema primario de forma no-lineal, pero de manera tal que un sistema secundario puede permanecer en reposo cuando el sistema primario vibra [18].

Esto implica que, al realizar un análisis lineal del conjunto, el movimiento del sistema primario coincide con un modo de vibración. El movimiento de los sistemas secundarios viene sin embargo determinado por una combinación de modos independientes al primero.

Para ilustrar lo anterior, conviene emplear un ejemplo. El sistema de la Figura 9 representa el modelo más simplificado del absorbedor de vibraciones autoparamétrico. En él se tiene un sistema

principal formado por un bloque de masa  $M$  que se encuentra excitado por una fuerza en principio armónica  $P(t)$ . El sistema primario tiene un único grado de libertad. El sistema secundario está formado por un péndulo unido al centro de gravedad del bloque principal, del cual tiene un momento de inercia de masa respecto a la articulación  $mR^2$ , la posición del péndulo está definida como un ángulo  $\theta(t)$ .

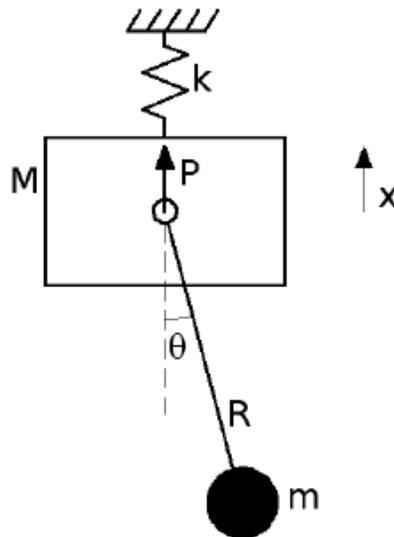


Figura 9 Absorbedor de vibraciones autoparamétrico simple [18].

Un planteamiento lineal, considerando ángulos  $\theta$  pequeños, de las ecuaciones de movimiento lleva a:

$$M\ddot{x} + kx = P \quad (35)$$

$$mR^2\ddot{\theta} + mgR\theta = 0 \quad (36)$$

donde se observa que cada una de las coordenadas  $\{x, \theta\}$  representa un modo de vibración. Partiendo de equilibrio estático, estas ecuaciones predicen un movimiento oscilatorio en la coordenada  $x$  mientras que  $\theta$  se mantendrá en reposo. Este, de hecho, es el comportamiento habitual del sistema, pero sí ciertas relaciones se dan entre los parámetros de este sistema aparece un comportamiento radicalmente distinto.

Supóngase  $\omega_x$  y  $\omega_\theta$  son las frecuencias naturales correspondientes a los dos grados de libertad del sistema  $x$  y  $\theta$  respectivamente. Supóngase además que la fuerza de excitación es de la forma  $P =$

$P_0 \cos(\Omega t)$ , con  $P_0$  pequeño. Si la relación entre frecuencia de excitación y frecuencia natural es tal que  $\Omega \approx \omega_x$ , el sistema primario está en resonancia. Esto produce vibraciones apreciables en la coordenada  $x$ , aun siendo  $P_0$  pequeño, mientras que no hay variación en  $\theta$ . Una predicción empleando un modelo lineal lleva a esta conclusión. De hecho, esto corresponde a lo que realmente sucede en un sistema físico de estas características, sólo siempre que se no se cumpla  $\omega_x \approx 2\omega_\theta$  el sistema se mantiene con características lineales. Si esta condición adicional se da, es decir, si  $\Omega \approx \omega_x \approx 2\omega_\theta$  y para valores de la amplitud de excitación mayores que uno crítico  $P_0 > P_0$  crítico, entonces el comportamiento del sistema difiere del anteriormente descrito. En este caso aparece un movimiento vibratorio en el péndulo. No sólo eso, además la amplitud de movimiento en  $x$  decrece para  $\omega_x \approx 2\omega_\theta$  con respecto al resto de valores de  $\omega_\theta$  (manteniendo el mismo valor de  $P_0$ ).

Lo que sucede físicamente está ilustrado en la Figura 10. Considérese un sistema de referencia inercial (ejes O) y otro ligado al bloque (ejes bloque). Al bajar (acelerarse) el bloque respecto a los ejes O, la inercia hace que el péndulo tienda a permanecer quieto, es decir, subir en ejes bloque. Así, cuando el bloque baja,  $|\theta|$  crece. Además, si el bloque alcanza suficiente aceleración, el equilibrio estable que formaba el péndulo en la posición  $\theta = 0$  se vuelve inestable. Al subir el bloque en ejes O, el péndulo tiende ahora a bajar en ejes bloque,  $|\theta|$  ahora decrece. De esta manera cada vez que el bloque oscila dos veces, el péndulo lo hace una. Esto es así porque el péndulo está siendo paramétricamente excitado con una frecuencia que es la mitad de la que lo está siendo el bloque. Al coincidir (aproximadamente) esta frecuencia de excitación del péndulo ( $1/2\Omega$ ) con su frecuencia natural  $\omega_\theta$  tenemos un nuevo fenómeno de resonancia, esta vez en el péndulo. Esto hace que, aunque la fuerza de excitación  $P_0$  sea en principio pequeña, existen oscilaciones apreciables en  $\theta$ . La amplitud de  $x$  decrece simplemente por conservación de la energía. La energía empleada en mover el péndulo debe restarse de la del sistema primario. Así es lógico que el bloque oscile con menor amplitud si adicionalmente debe mover al péndulo.



Figura 10 Funcionamiento del absorbedor de vibraciones autoparamétrico [18].

El planteamiento lineal falla a la hora de predecir el comportamiento del sistema, porque el mecanismo de movimiento se refleja en ecuaciones de orden superior a 1. La relación entre  $x$  y  $\theta$  que produce este movimiento puede aproximarse como mínimo mediante términos cuadráticos. Esto es fácil de ver si se tienen en cuenta las ecuaciones de movimiento completas del sistema.

De forma general, un sistema autoparamétrico cualquiera cumple las siguientes características:

- Está compuesto por al menos un sistema primario y otro secundario acoplados entre sí.
- Admite una solución semi-trivial en la que el sistema secundario se mantiene en reposo.
- La solución semi-trivial puede volverse inestable cuando se cumple determinada relación entre los parámetros del sistema y sus ecuaciones dinámicas.
- En estas situaciones de inestabilidad, existe resonancia autoparamétrica. Las vibraciones del sistema primario actúan como excitación paramétrica del sistema secundario, que ya no permanecerá en reposo.

Pueden darse varios fenómenos dentro de los sistemas autoparamétricos:

- Las vibraciones en un sistema autoparamétrico pueden ser de tipo periódico, cuasi periódico, no periódico o incluso caótico.
- Los efectos de saturación pueden ocurrir con frecuencia. Al aumentar la energía en el sistema primario, las deflexiones en el sistema secundario aumentan en gran medida. Es

decir, al aumentar la energía proporcionada al sistema global, a partir de cierta cantidad, esta energía extra se emplea casi completamente en el movimiento del sistema secundario.

La resonancia autoparamétrica puede darse en situaciones prácticas. En general la resonancia autoparamétrica puede presentarse en cualquier sistema oscilatorio al que se le acopla un segundo sistema (por ejemplo, un péndulo). La estabilidad de la solución no-trivial estará determinada por la relación de frecuencias entre el primer sistema y el segundo. Obsérvese la Figura 11, el ala de un avión es el sistema primario que vibra debido a las fuerzas aerodinámicas que actúan sobre la misma. Los turborreactores actúan en este caso como péndulos. En una aproximación, este conjunto puede reducirse a un absorbedor autoparamétrico similar al de la Figura 10. Si las frecuencias naturales de ala y motores son tales que se produce resonancia autoparamétrica, pueden ocasionar consecuencias catastróficas. En este caso, la amplitud de las oscilaciones del ala apenas aumenta transfiriendo la energía al péndulo. Ese aumento en las oscilaciones de las góndolas puede resultar fatal para su unión con el ala.

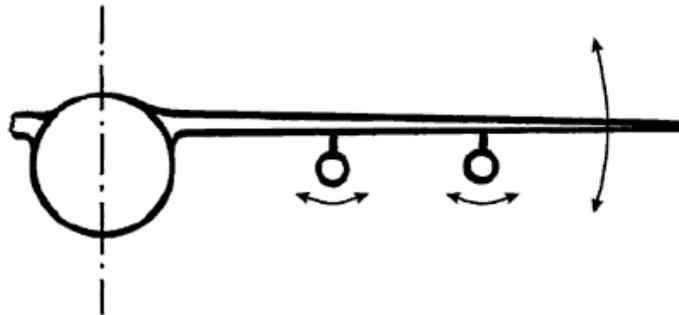


Figura 11 Ala de avión con turborreactores [18].

### 3.21 Controlador PID

Con la intención de disminuir la señal de error de un proceso es necesario el uso de un controlador que por medio de ganancias produzcan una respuesta más estable.

El controlador que se utilizará en este proyecto es del tipo PID (Proporcional-Integral-Derivativo), el cual se representa por la siguiente función de transferencia:

$$G_c(s) = K_p \left( 1 + \frac{1}{T_i s} + T_D s \right) \quad (37)$$

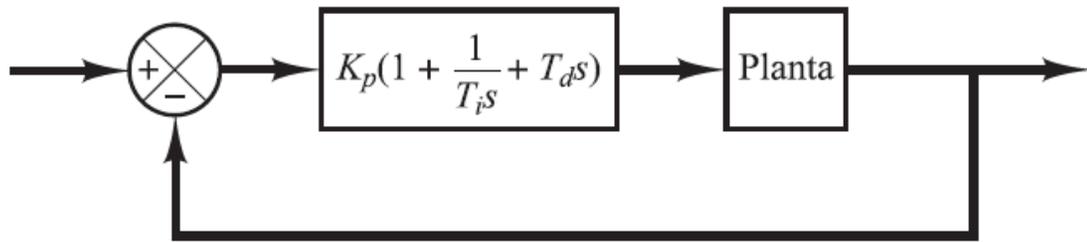


Figura 12 Sistema de control PID [19].

En la Figura 12 se muestra el diagrama de bloques de un sistema de control realimentado de forma arbitraria.

El control PID se construye a partir de la combinación de términos proporcional, integral y derivativo según se requiera para cumplir los requerimientos de rendimiento específicos, por lo tanto, la señal de control aplicada al proceso es:

$$u(t) = k_p e(t) + T_i \int_0^t e(t) dt + T_D \frac{de(t)}{dt} \quad (38)$$

En donde  $k_p$ ,  $T_i$  y  $T_D$  son las constantes proporcional, integral y derivativa, respectivamente asociadas a la ley de control. [19].

Un controlador PID diseñado adecuadamente afectará el desempeño de un sistema de control en las formas siguientes:

- 1.- Mejora el amortiguamiento.
- 2.- Mejora los tiempos de levantamiento y el tiempo de asentamiento.

### 4. Materiales y Métodos

En este capítulo se proporciona el análisis analítico, numérico y experimental tanto de la estructura tipo edificio sin el sistema autoparamétrico como con el uso de este, empleando herramientas de ingeniería recomendadas para cada una de las etapas del desarrollo.

#### 4.1 Modelo dinámico del sistema considerando 2 grados de libertad

En la Figura 1 se mostró el diagrama esquemático de una estructura tipo edificio de un piso, acoplado a un absorbedor de vibraciones de tipo autoparamétrico, configurado para que oscile en un plano horizontal, con un punto de equilibrio paralelo a la excitación proporcionada a la base de la estructura, la cual es en forma de una aceleración  $\ddot{z}(t) = -Z\omega^2 \text{sen}\Omega t$  con amplitud  $Z\omega^2$  y frecuencia de excitación  $\Omega$ . El sistema primario consiste en una masa  $m_1$  interconectada con la base por cuatro columnas flexibles las cuales proporcionan la rigidez equivalente del sistema primario  $k_1$ .

El sistema mostrado en la Figura 1 se puede abordar usando el diseño de la Figura 13 equivalente al absorbedor de vibraciones sugerido por Haxton y Barr (1972), que para algunas aplicaciones puede ser una alternativa adecuada para la masa sintonizada tradicional [20].

Para obtener el modelo dinámico del sistema se plantea el Lagrangiano ( $L$ ) donde los grados de libertad considerados son los desplazamientos asociados a cada una de las masas ( $x, \theta$ ):

$$L = T - V \quad (39)$$

donde:

T=Energía cinética total en el sistema.

V=Energía potencial total en el sistema.

La energía cinética total del sistema está dada por:

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{r}_2^2 + \frac{1}{2}m_i\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_b\dot{r}_b^2 + \frac{1}{2}m_s\dot{r}_s^2 + \frac{1}{2}m_f\dot{r}_f^2 + \frac{1}{2}J_2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}J_i\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}J_b\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}J_s\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}J_f\dot{\theta}^2 \quad (40)$$

donde  $m_1$  es la masa del sistema primario (estructura),  $m_2$  es la masa efectiva del péndulo (absorbedor),  $m_i$  es la masa de la junta central (absorbedor),  $m_b$  es la masa de la barra (absorbedor),  $m_f$  es la masa de la barra sin fin (absorbedor) y  $r_2, r_b, r_s, r_f$  son los valores de los vectores utilizados para el cálculo de las distancias y  $J_2, J_i, J_b, J_s, J_f$  son los momentos de inercia de masa de la masa efectiva del péndulo, el centro de giro, la barra del absorbedor y la barra sin fin, respectivamente, los cuales se muestran sus expresiones posteriormente.

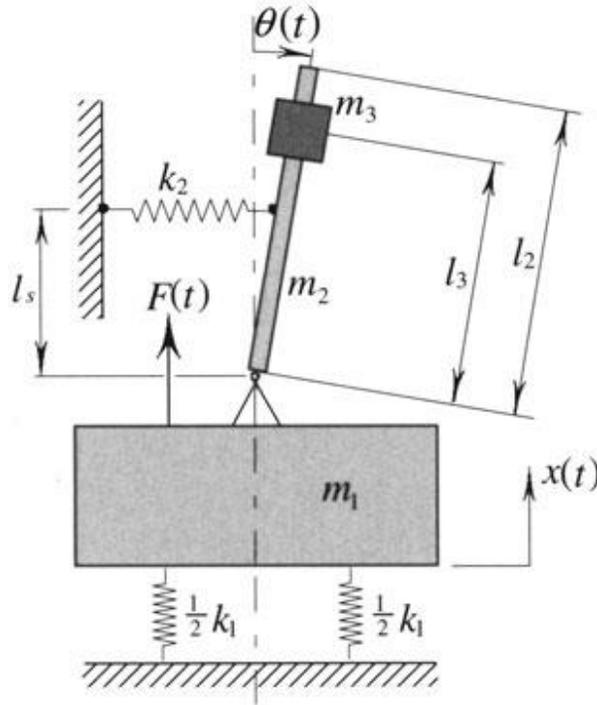


Figura 13 Diagrama esquemático de un absorbedor autoparamétrico [20].

Cálculo de los vectores de posición.

$$\begin{aligned}
 r_2 &= (x + L \cos \theta, L \sin \theta) \\
 \dot{r}_2 &= (\dot{x} - L \dot{\theta} \sin \theta, L \dot{\theta} \cos \theta) \\
 \dot{r}_2^2 &= \dot{x}^2 - 2L \dot{x} \dot{\theta} \sin \theta + L^2 \dot{\theta}^2 \sin^2 \theta + L^2 \dot{\theta}^2 \cos^2 \theta \\
 &= \dot{x}^2 - 2L \dot{x} \dot{\theta} \sin \theta + L^2 \dot{\theta}^2
 \end{aligned} \tag{41}$$

$$\begin{aligned}
 r_b &= \left( x + \frac{l_b}{2} \cos \theta, \frac{l_b}{2} \sin \theta \right) \\
 \dot{r}_b &= \left( \dot{x} - \frac{l_b}{2} \dot{\theta} \sin \theta, \frac{l_b}{2} \dot{\theta} \cos \theta \right)
 \end{aligned} \tag{42}$$

$$\begin{aligned}\dot{r}_b^2 &= \dot{x}^2 - l_b \dot{x} \dot{\theta} \text{Sen } \theta + \frac{l_b^2}{4} \dot{\theta}^2 \text{Sen}^2 \theta + \frac{l_b^2}{4} \dot{\theta}^2 \text{Cos}^2 \theta \\ &= \dot{x}^2 - l_b \dot{x} \dot{\theta} \text{Sen } \theta + \frac{l_b^2}{4} \dot{\theta}^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}r_s &= r_b \\ \dot{r}_s^2 &= \dot{r}_b^2\end{aligned}\tag{43}$$

$$\begin{aligned}r_f &= (x + l_b \text{Cos } \theta, l_b \text{Sen } \theta) \\ \dot{r}_f &= (\dot{x} - l_b \dot{\theta} \text{Sen } \theta, l_b \dot{\theta} \text{Cos } \theta) \\ \dot{r}_f^2 &= \dot{x}^2 - 2l_b \dot{x} \dot{\theta} \text{Sen } \theta + l_b^2 \dot{\theta}^2 \text{Sen}^2 \theta + l_b^2 \dot{\theta}^2 \text{Cos}^2 \theta \\ &= \dot{x}^2 - 2l_b \dot{x} \dot{\theta} \text{Sen } \theta + l_b^2 \dot{\theta}^2\end{aligned}\tag{44}$$

Si se sustituye el valor de los vectores anteriormente mostrados en la ecuación de energía cinética (Ec. (40)), se obtiene la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}T &= \frac{1}{2} m_1 \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}^2 - 2L \dot{x} \dot{\theta} \text{Sen } \theta + L^2 \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2} m_i \dot{x}^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} m_b \left( \dot{x}^2 - l_b \dot{x} \dot{\theta} \text{Sen } \theta + \frac{l_b^2}{4} \dot{\theta}^2 \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} m_s \left( \dot{x}^2 - l_b \dot{x} \dot{\theta} \text{Sen } \theta + \frac{l_b^2}{4} \dot{\theta}^2 \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} m_f (\dot{x}^2 - 2l_b \dot{x} \dot{\theta} \text{Sen } \theta + l_b^2 \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2} J_2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} J_i \dot{\theta}^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} J_b \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} J_s \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} J_f \dot{\theta}^2\end{aligned}\tag{45}$$

La energía potencial total del sistema es:

$$V = \frac{1}{2} k_1 x_1^2 + \frac{1}{2} k_2 \theta^2\tag{46}$$

donde  $k_1$  es la rigidez del sistema primario (asociado a las columnas del sistema),  $k_2$  la rigidez del sistema secundario (asociado a los resortes que mantienen al sistema en su punto de equilibrio).

Sustituyendo las ecuaciones (45) y (46) en la ecuación (39) se obtiene:

$$\begin{aligned}
L(x, \dot{x}, \theta, \dot{\theta}) = & \frac{1}{2}m_1\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_2(\dot{x}^2 - 2L\dot{x}\dot{\theta}\text{Sen } \theta + L^2\dot{\theta}^2) + \frac{1}{2}m_i\dot{x}^2 \\
& + \frac{1}{2}m_b\left(\dot{x}^2 - l_b\dot{x}\dot{\theta}\text{Sen } \theta + \frac{l_b^2}{4}\dot{\theta}^2\right) \\
& + \frac{1}{2}m_s\left(\dot{x}^2 - l_b\dot{x}\dot{\theta}\text{Sen } \theta + \frac{l_b^2}{4}\dot{\theta}^2\right) \\
& + \frac{1}{2}m_f(\dot{x}^2 - 2l_b\dot{x}\dot{\theta}\text{Sen } \theta + l_b^2\dot{\theta}^2) + \frac{1}{2}J_2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}J_i\dot{\theta}^2 \\
& + \frac{1}{2}J_b\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}J_s\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}J_f\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}k_1x^2 - \frac{1}{2}k_2\theta^2
\end{aligned} \tag{47}$$

Se aplica la metodología de Euler-Lagrange para obtener las ecuaciones del modelo dinámico del sistema.

Para el cálculo del primer grado de libertad se obtiene la siguiente ecuación siguiendo el formalismo antes mencionado:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = \tau \tag{48}$$

donde  $\tau$  es el vector de fuerzas externas

Para simplificar el cálculo se procede obteniendo las expresiones de las derivadas.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = & (m_1 + m_2 + m_i + m_b + m_s + m_f)\dot{x} \\
& - (m_2L + 0.5m_b l_b + 0.5m_s l_b + m_f l_b)\dot{\theta}\text{Sen } \theta
\end{aligned} \tag{49}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = & (m_1 + m_2 + m_i + m_b + m_s + m_f)\ddot{x} \\
& - (m_2L + 0.5m_b l_b + 0.5m_s l_b + m_f l_b)\dot{\theta}^2 \text{Cos } \theta \\
& - (m_2L + 0.5m_b l_b + 0.5m_s l_b + m_f l_b)\ddot{\theta}\text{Sen } \theta
\end{aligned} \tag{50}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -k_1x \tag{51}$$

Sustituyendo las ecuaciones (50) y (51) en la ecuación (48) se obtiene la primera ecuación del modelo dinámico:

$$\begin{aligned}
& (m_1 + m_2 + m_i + m_b + m_s + m_f)\ddot{x} \\
& - (m_2L + 0.5m_b l_b + 0.5m_s l_b + m_f l_b)\dot{\theta}^2 \text{Cos } \theta \\
& - (m_2L + 0.5m_b l_b + 0.5m_s l_b + m_f l_b)\ddot{\theta} \text{Sen } \theta + k_1 x + c_1 \dot{x} \\
& = f(t)
\end{aligned} \tag{52}$$

Para el cálculo de la ecuación del segundo grado de libertad se obtiene siguiendo el formalismo de Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = \tau \tag{53}$$

Para simplificar el cálculo se procede obteniendo las expresiones de las derivadas.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = & \left( m_2 L^2 + \frac{1}{4} m_b l_b^2 + \frac{1}{4} m_s l_b^2 + m_f l_b^2 \right) \dot{\theta} - (m_2 L + 0.5 m_b l_b + 0.5 m_s l_b \\
& + m_f l_b) \dot{x} \text{Sen } \theta + J_2 \dot{\theta} + J_i \dot{\theta} + J_b \dot{\theta} + J_s \dot{\theta} + J_f \dot{\theta}
\end{aligned} \tag{54}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = & \left( m_2 L^2 + \frac{1}{4} m_b l_b^2 + \frac{1}{4} m_s l_b^2 + m_f l_b^2 \right) \ddot{\theta} - (m_2 L + 0.5 m_b l_b \\
& + 0.5 m_s l_b + m_f l_b) \ddot{x} \text{Sen } \theta - (m_2 L + 0.5 m_b l_b + 0.5 m_s l_b \\
& + m_f l_b) \dot{x} \dot{\theta} \text{Cos } \theta + J_2 \ddot{\theta} + J_i \ddot{\theta} + J_b \ddot{\theta} + J_s \ddot{\theta} + J_f \ddot{\theta}
\end{aligned} \tag{55}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = - (m_2 L + 0.5 m_b l_b + 0.5 m_s l_b + m_f l_b) \dot{x} \dot{\theta} \text{Cos } \theta - k_2 \theta \tag{56}$$

Sustituyendo las ecuaciones (55) y (56) en la ecuación (53) se obtiene la segunda ecuación del modelo dinámico:

$$\begin{aligned}
& \left( m_2 L^2 + \frac{1}{4} m_b l_b^2 + \frac{1}{4} m_s l_b^2 + m_f l_b^2 \right) \ddot{\theta} \\
& - (m_2 L + 0.5 m_b l_b + 0.5 m_s l_b + m_f l_b) \ddot{x} \text{Sen } \theta \\
& - (m_2 L + 0.5 m_b l_b + 0.5 m_s l_b + m_f l_b) \dot{x} \dot{\theta} \text{Cos } \theta + J_2 \ddot{\theta} \\
& + J_i \ddot{\theta} + J_b \ddot{\theta} + J_s \ddot{\theta} + J_f \ddot{\theta} \\
& + (m_2 L + 0.5 m_b l_b + 0.5 m_s l_b + m_f l_b) \dot{x} \dot{\theta} \text{Cos } \theta + k_2 \theta \\
& + c_2 \dot{\theta} = 0
\end{aligned} \tag{57}$$

Simplificando.

$$\begin{aligned}
& \left( m_2 L^2 + \frac{1}{4} m_b l_b^2 + \frac{1}{4} m_s l_b^2 + m_f l_b^2 \right) \ddot{\theta} \\
& - (m_2 L + 0.5 m_b l_b + 0.5 m_s l_b + m_f l_b) \ddot{x} \text{Sen } \theta + J_2 \ddot{\theta} + J_i \ddot{\theta} \\
& + J_b \ddot{\theta} + J_s \ddot{\theta} + J_f \ddot{\theta} + k_2 \theta + c_2 \dot{\theta} = 0
\end{aligned} \tag{58}$$

Cálculo de los momentos de inercia de masa adaptados a los datos obtenidos en el diseño creado en SolidWorks.

$$\begin{aligned}
J_2 &= J_c + m_2 L^2 = 7.24593 \times 10^{-4} m_2 + m_2 L^2 \\
&= m_2 (7.24593 \times 10^{-4} + L^2)
\end{aligned} \tag{59}$$

$$J_i = J_c = 4.3188 \times 10^{-5} \tag{60}$$

$$J_b = J_c + m_b \left( \frac{l_b}{2} \right)^2 = \frac{m_b}{12} (l_b^2 + 0.0254^2) + m_b \left( \frac{l_b}{2} - 0.0127 \right)^2$$

Considerando la masa de la barra ( $m_b$ ) por su relación directamente proporcional con la longitud de la barra ( $l_b$ ) originalmente de 1 m y el peso original de la barra de 0.75 kg

$$m_b = 0.75 l_b \tag{61}$$

$$\begin{aligned}
J_b &= \frac{(0.75l_b)}{12}(l_b^2 + 0.0254^2) + (0.75l_b)\left(\frac{l_b}{2} - 0.0127\right)^2 \\
&= \left(\frac{l_b^3}{16}\right) + 4.03225 \times 10^{-5} l_b \\
&\quad + (0.75l_b)\left(\frac{l_b^2}{4} - 0.0127l_b + 1.6129 \times 10^{-4}\right) \\
&= \left(\frac{l_b^3}{4}\right) - 9.525 \times 10^{-3} l_b^2 + 1.6129 \times 10^{-4} l_b
\end{aligned} \tag{62}$$

$$\begin{aligned}
J_s &= J_c + m_s \left(\frac{l_b}{2} - 0.0127\right)^2 = \frac{m_s l_b^2}{12} + m_s \left(\frac{l_b^2}{4} - 0.0127l_b + 1.6129 \times 10^{-4}\right) \\
&= m_s \left[\frac{l_b^2}{3} - 0.0127l_b + 1.6129 \times 10^{-4}\right]
\end{aligned}$$

Considerando la masa del sinfín ( $m_s$ ) por su relación directamente proporcional con la longitud de la barra ( $l_b$ ) originalmente de 1 metro y el peso original del sinfín de 0.18 kg

$$m_s = 0.18l_b \tag{63}$$

$$\begin{aligned}
J_s &= 0.18l_b \left[\frac{l_b^2}{3} - 0.0127l_b + 1.6129 \times 10^{-4}\right] \\
&= 0.06l_b^3 - 2.286 \times 10^{-3} l_b + 2.90322 \times 10^{-5}
\end{aligned} \tag{64}$$

Considerando la masa del extremo final del absorbedor ( $m_f$ ) con masa constante de 0.1 kg, tomando en cuenta las propiedades del diseño en SolidWorks y la pieza fabricada de aluminio.

$$m_f = 0.1 \tag{65}$$

$$J_f = J_c + m_f l_b^2 = 1.6387 \times 10^{-5} + 0.1 (l_b)^2 \tag{66}$$

Sustituyendo las ecuaciones (59), (61), (62), (63), (64), (65) y (66) en la ecuación (58), resulta

$$\begin{aligned}
& \left( m_2 L^2 + \frac{1}{4} (0.75 l_b) l_b^2 + \frac{1}{4} (0.18 l_b) l_b^2 + 0.1 l_b^2 \right) \ddot{\theta} \\
& - (m_2 L + 0.5 (0.75 l_b) l_b + 0.5 (0.18 l_b) l_b + 0.1 l_b) \ddot{x} \text{Sen } \theta \\
& + m_2 (7.24593 \times 10^{-4} + L^2) \ddot{\theta} + 4.3188 \times 10^{-5} \ddot{\theta} \\
& + \left[ \left( \frac{l_b^3}{4} \right) - 9.525 \times 10^{-3} l_b^2 + 1.6129 \times 10^{-4} l_b \right] \ddot{\theta} \\
& + [0.06 l_b^3 - 2.286 \times 10^{-3} l_b + 2.90322 \times 10^{-5}] \ddot{\theta} \\
& + [1.6387 \times 10^{-5} + 0.1 (l_b)^2] \ddot{\theta} + k_2 \theta + c_2 \dot{\theta} = 0
\end{aligned} \tag{67}$$

Simplificando

$$\begin{aligned}
& (m_2 (7.24593 \times 10^{-4} + 2L^2) + 0.5425 l_b^3 + 0.190475 l_b^2 \\
& - 2.12471 \times 10^{-3} l_b + 8.86072 \times 10^{-5}) \ddot{\theta} \\
& - (m_2 L + 0.465 l_b^2 + 0.1 l_b) \ddot{x} \text{Sen } \theta + k_2 \theta + c_2 \dot{\theta} = 0
\end{aligned} \tag{68}$$

El modelo dinámico del sistema mostrado en la Figura 1 discretizado en 2 gdl, está dado por las ecuaciones (52) y (68) en el que se considera una fuerza armónica:

$$\begin{aligned}
& (m_1 + m_2 + m_i + m_b + m_s + m_f) \ddot{x} - (m_2 L + 0.465 l_b^2 + 0.1 l_b) \dot{\theta}^2 \text{Cos } \theta \\
& - (m_2 L + 0.465 l_b^2 + 0.1 l_b) \ddot{\theta} \text{Sen } \theta + k_1 x + c_1 \dot{x} = F \text{ sen } \omega t
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (m_2 (7.24593 \times 10^{-4} + 2L^2) + 0.5425 l_b^3 + 0.190475 l_b^2 - 2.12471 \times 10^{-3} l_b + 8.86072 \times 10^{-5}) \ddot{\theta} \\
& - (m_2 L + 0.465 l_b^2 + 0.1 l_b) \ddot{x} \text{Sen } \theta + k_2 \theta + c_2 \dot{\theta} = 0
\end{aligned}$$

El modelo dinámico del sistema dado por las ecuaciones (52) y (68) se puede representar en forma vectorial matricial, de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} m_1 + m_2 + m_i + m_b + m_s + m_f & -(m_2 L + 0.465 l_b^2 + 0.1 l_b) \text{Sen } \theta \\ -(m_2 L + 0.465 l_b^2 + 0.1 l_b) \text{Sen } \theta & m_2 (7.24593 \times 10^{-4} + 2L^2) + 0.5425 l_b^3 + 0.190475 l_b^2 - 2.12471 \times 10^{-3} l_b + 8.86072 \times 10^{-5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} \\
& + \begin{bmatrix} c_1 & -(m_2 L + 0.465 l_b^2 + 0.1 l_b) \dot{\theta} \text{Cos } \theta \\ 0 & c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 x \\ k_2 \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \text{ sen } \omega t \\ 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

## 4.2 Condición de sintonización de un absorbedor autoparamétrico.

Haciendo uso de las condiciones de sintonización para obtener la mejor absorción de energía del sistema secundario establecidas por Haxton y Barr (1972) [1] y adaptadas al trabajo actual se

obtienen las siguientes relaciones de frecuencia, las cuales son conocidas como condiciones de sintonización externa e interna, respectivamente:

$$\Omega = \omega_n \quad (69)$$

$$\omega_n = 2\omega_{abs} \quad (70)$$

donde  $\Omega$  es la frecuencia de excitación,  $\omega_n$  es la frecuencia natural del sistema primario y  $\omega_{abs}$  es la frecuencia del sistema secundario.

Haciendo uso de las ecuaciones (68) y (70) podemos obtener el valor de  $k_2$ , como se muestra:

$$\omega_n = 2 \sqrt{\frac{k_2}{m_2(7.24593 \times 10^{-4} + 2L^2) + 0.5425l_b^3 + 0.190475l_b^2 - 2.12471 \times 10^{-3}l_b + 8.86072 \times 10^{-5}}}}$$

Elevando al cuadrado

$$\omega_n^2 = \frac{4k_2}{m_2(7.24593 \times 10^{-4} + 2L^2) + 0.5425l_b^3 + 0.190475l_b^2 - 2.12471 \times 10^{-3}l_b + 8.86072 \times 10^{-5}}$$

Despejando  $k_2$ , resulta

$$k_2 = \left(\frac{\omega_n^2}{4}\right) (m_2(7.24593 \times 10^{-4} + 2L^2) + 0.5425l_b^3 + 0.190475l_b^2 - 2.12471 \times 10^{-3}l_b + 8.86072 \times 10^{-5}) \quad (71)$$

### 4.3 Resultados en simulación

Con la intención de mostrar la interacción dinámica que existe entre el sistema primario (estructura tipo edificio discretizada en 1 gdl) y el absorbedor autoparamétrico (ver Figura 1) se realizaron simulaciones numéricas usando Matlab-Simulink.

Los parámetros del sistema completo se muestran en la Tabla 2. La rigidez equivalente asociada al (primer modo) absorbedor autoparamétrico es tal que dicho absorbedor esté propiamente sintonizado conforme a las condiciones de sintonización (ver Ecs. (69) y (70)).

Tabla 2 Parámetros para el análisis del sistema primario con absorbedor autoparamétrico.

$m_1 = 2.5235 \text{ kg}$	$m_2 = 0.3774 \text{ kg}$	$m_b = 0.4604 \text{ kg}$	$k_1 = 210 \text{ N/m}$	$k_2 = 2.7407 \text{ Nm/rad}$
$m_f = 0.1 \text{ kg}$	$m_i = 0.265 \text{ kg}$	$m_s = 0.1105 \text{ kg}$	$c_1 = 0.83 \text{ Ns/m}$	$c_2 = 0.048 \text{ Nms/rad}$
$L = 0.0722 \text{ m}$	$l_b = 0.6139 \text{ m}$	$\omega_n = 7.3981 \text{ rad/s}$	$\Omega = 7.3981 \text{ rad/s}$	$\theta_0 = 0.03 \text{ rad}$

La respuesta en el dominio del tiempo del grado de libertad asociado al desplazamiento lateral de la estructura tipo edificio sin y con absorbedor tipo autoparamétrico se muestra en la Figura 14. Es evidente que el porcentaje de absorción es significativo (cercano al 84%) cuando se utiliza un absorbedor pasivo de vibraciones de este tipo.

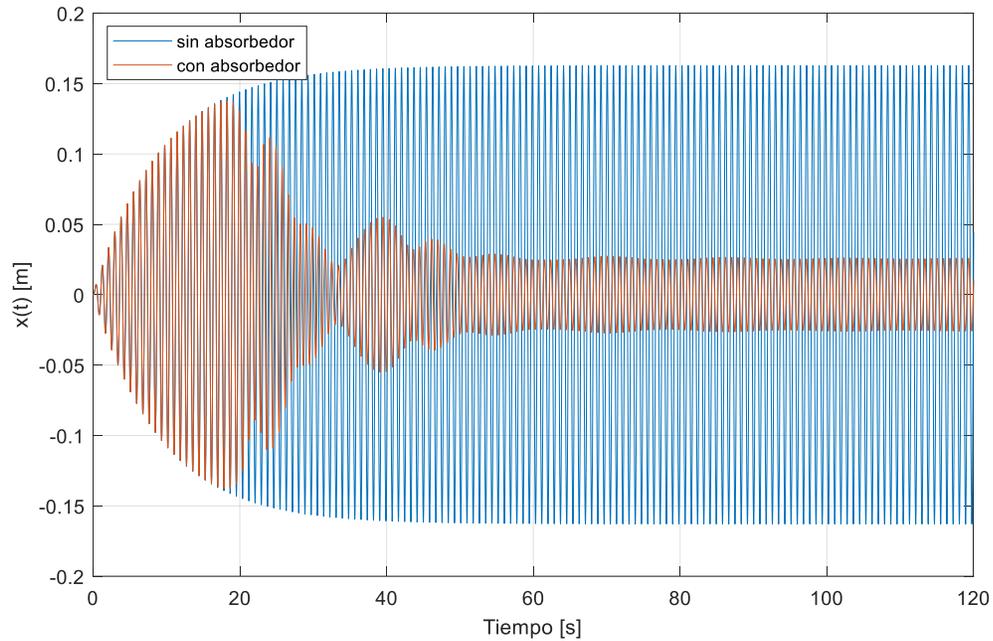


Figura 14 Respuesta dinámica del sistema primario sin y con absorbedor autoparamétrico.

La respuesta del sistema secundario cuando se encuentra excitado con la condición de sintonización interna se muestra en la Figura 15 donde la amplitud en estado estable es  $\theta(t) = 0.5 \text{ rad}$ .

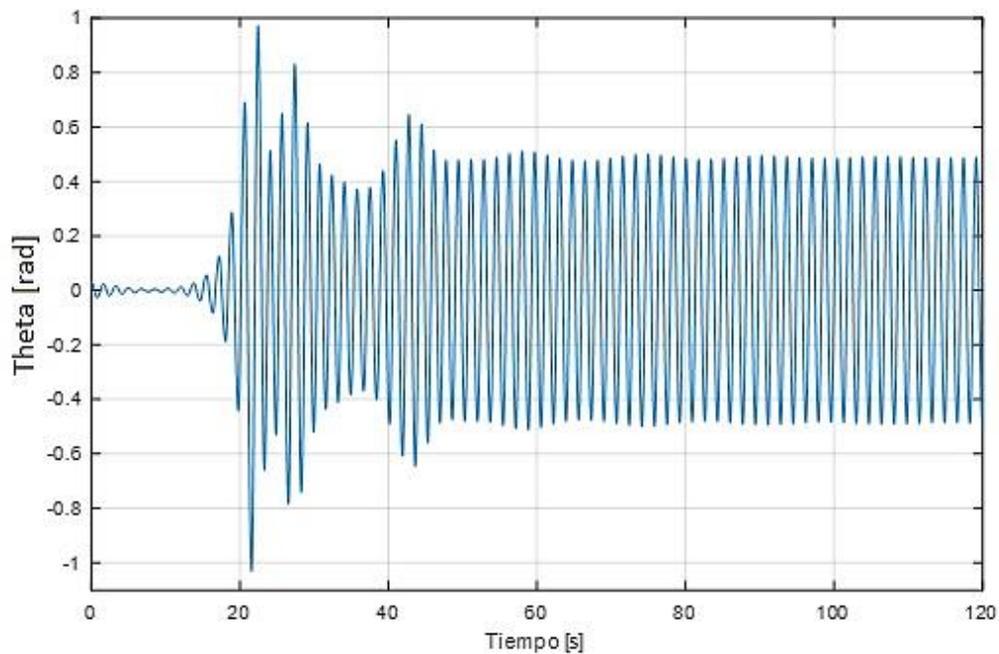


Figura 15 Respuesta dinámica del sistema secundario tipo autoparamétrico.

Las respuestas en el dominio de la frecuencia, tanto del sistema primario, cuando hay interacción autoparamétrica y cuando no hay, como también el comportamiento del sistema secundario, se muestran en las Figura 16 y Figura 17 respectivamente. Se observa que el sistema secundario se encuentra acoplado con el sistema primario de tal manera que exista interacción autoparamétrica entre ambos; ya que su valor de frecuencia natural ( $\omega_{abs} = 0.5875 \text{ Hz}$ ) es la mitad de la frecuencia natural del sistema primario ( $\omega_n = 1.1788 \text{ Hz} = \Omega$ ).

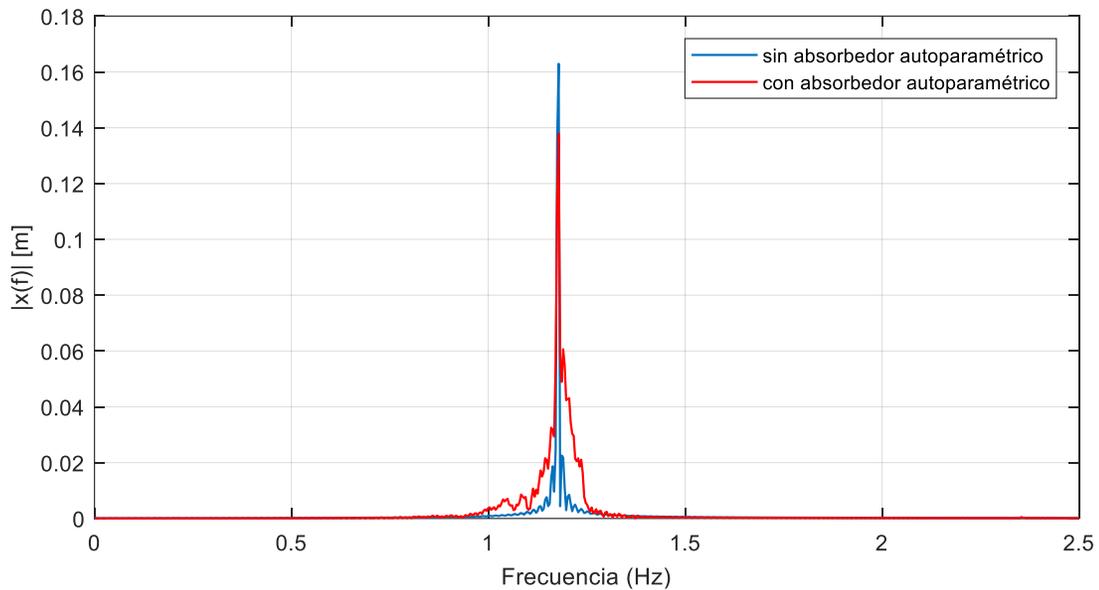


Figura 16 FRF del sistema primario con y sin absorbedor autoparamétrico.

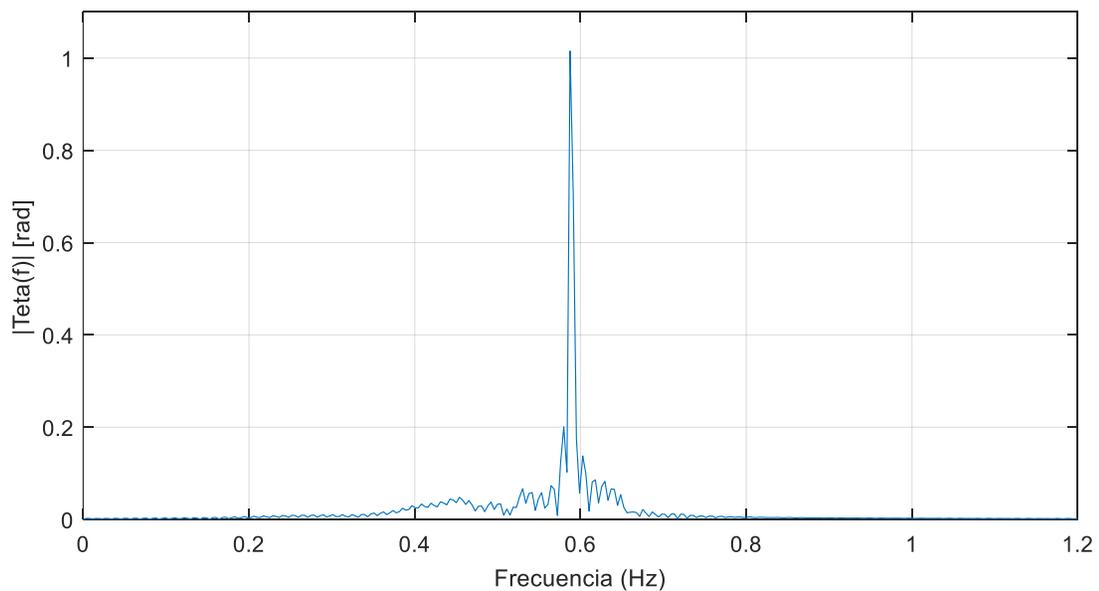


Figura 17 FRF del sistema secundario cuando se presenta interacción autoparamétrica.

#### 4.4 Análisis frecuencial aproximado

Una forma de determinar la respuesta frecuencial de un sistema no lineal consiste en utilizar el método de Bode una vez linealizado el sistema. Sin embargo, si se linealiza el modelo dinámico se pierde información relacionada a las dinámicas de los acoplamientos.

Debido a que es necesario determinar las respuestas frecuenciales que permitan un análisis del sistema y una posterior síntesis de control, se opta por utilizar la solución presentada en [4] la cual se obtuvo implementando el Método de Escalas Múltiples.

El Método de Escalas Múltiples se usa para calcular la amplitud de vibración de ambos subsistemas en función de la frecuencia de excitación y posibles cambios alrededor de ésta.

Para aplicar el método es necesario normalizar el sistema y perturbarlo en los términos de interés.

$$\ddot{x} + 2\varepsilon\zeta_1\omega_1\dot{x} + \omega_1^2x - \varepsilon h(\ddot{\theta} + \dot{\theta}^2) = \varepsilon f \cos(\Omega t) \quad (72)$$

$$\ddot{\theta} + 2\varepsilon\zeta_2\omega_2\dot{\theta} + \omega_2^2\theta + \varepsilon g\ddot{x} = 0 \quad (73)$$

donde:

$$\begin{aligned} \omega_1^2 &= \frac{k_1}{m_t} & \omega_2^2 &= \frac{k_2}{J_t} & \varepsilon h &= m_t^{-1}(m_2l + 0.1l_b \\ & & & & & + 0.465l_b^2) \\ \varepsilon\zeta_1 &= \frac{c_1}{2\omega_1m_t} & \varepsilon\zeta_2 &= \frac{c_2}{2\omega_2J_t} & \varepsilon g &= J_t^{-1}(m_2l + 0.1l_b \\ & & & & & + 0.465l_b^2) \\ & & & & \varepsilon f &= \frac{F_0}{m_t} \end{aligned}$$

Si no se perturba al sistema secundario en sus condiciones iniciales, la amplitud de vibración para el sistema primario está dado por:

$$4\omega^2 a^2 ((\varepsilon\rho)^2 + (\varepsilon\zeta_1)^2 \omega^2) - (\varepsilon f)^2 = 0 \quad (74)$$

Utilizando los parámetros mostrados en la Tabla 2, se procede a graficar la respuesta frecuencial como se muestra en la Figura 18.

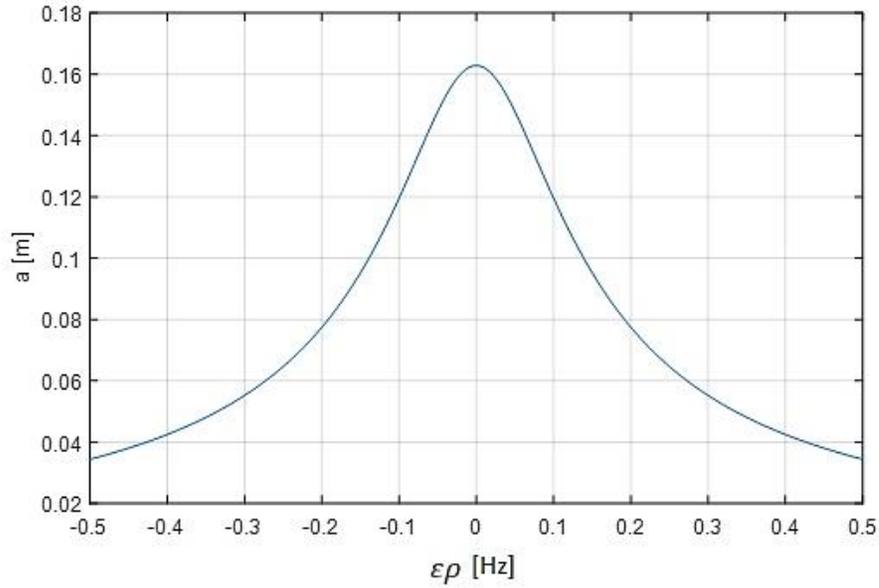


Figura 18 Respuesta frecuencial aproximada del sistema primario sin interacción autoparamétrica utilizando MEM.

Cuando se presenta interacción autoparamétrica en el sistema, las amplitudes de vibración en función de la frecuencia están dadas por:

$$a = \frac{4\omega_2^2}{(\varepsilon g)\omega_1^2} \sqrt{\left(\frac{\varepsilon\rho + \omega_1}{2\omega_2} - 1\right)^2 + (\varepsilon\zeta_2)^2} \quad (75)$$

Utilizando los parámetros mostrados en la Tabla 2, se procede a graficar la respuesta frecuencial del sistema primario con interacción autoparamétrica como se muestra en la Figura 19.

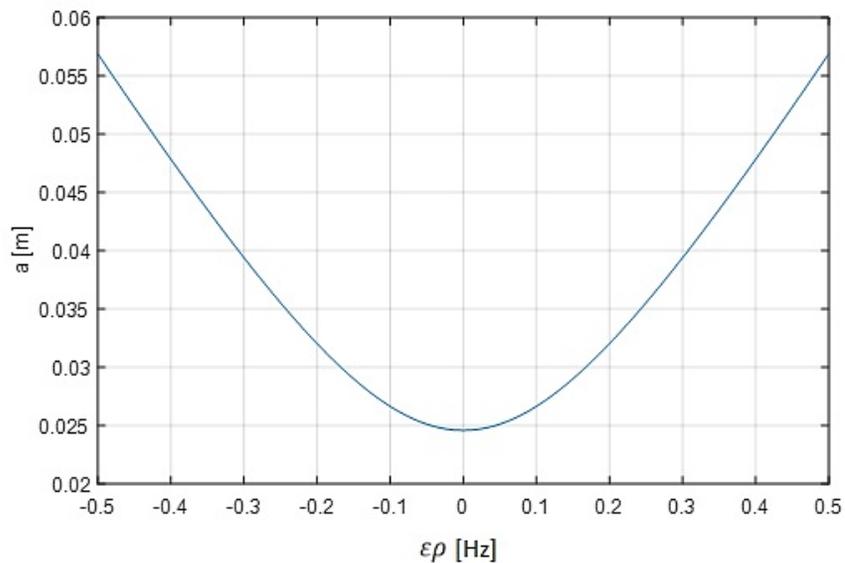


Figura 19 Respuesta frecuencial aproximada del sistema primario con interacción autoparamétrica.

Sistema secundario:

$$b^4 + Qb^2 + R = 0 \quad (76)$$

donde:

$$Q = -\frac{8(\Omega - 2\omega_2)(\Omega - \omega_1)}{(\varepsilon h)(\varepsilon g)\omega_1\omega_2} + \frac{16(\varepsilon\zeta_1)(\varepsilon\zeta_2)}{(\varepsilon h)(\varepsilon g)}$$

$$R = \frac{64[(\Omega - \omega_1)^2 + \omega_1^2(\varepsilon\zeta_1)^2]}{(\varepsilon h)^2(\varepsilon g)^2\omega_1^2} \left[ \left( \frac{\Omega}{2\omega_2} - 1 \right)^2 + (\varepsilon\zeta_2)^2 \right] - \frac{(\varepsilon f)^2}{(\varepsilon h)^2\omega_2^4}$$

Utilizando los parámetros mostrados en la Tabla 2, se procede a graficar la respuesta frecuencial del sistema secundario durante la interacción autoparamétrica como se muestra en la Figura 20.

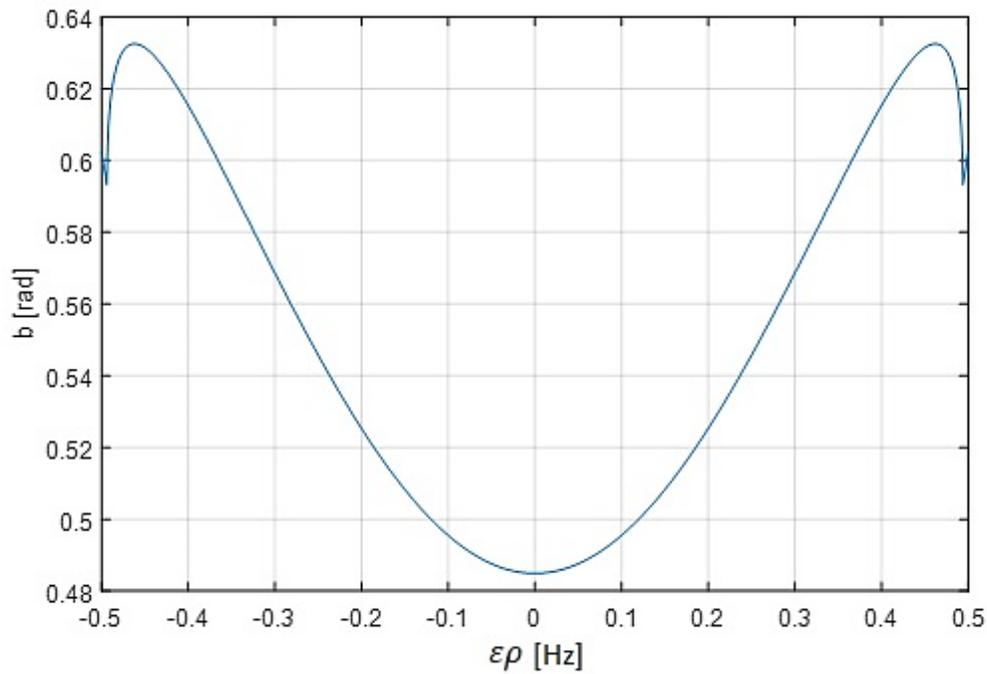


Figura 20 Respuesta frecuencial del sistema secundario durante la interacción autoparamétrica.

#### 4.5 Modelo dinámico del sistema considerando 3 grados de libertad

Para la consideración del sistema semi-activo se considera a la longitud efectiva del absorbedor tipo pendular (L) como un grado de libertad más a considerar, por lo cual es necesario obtener el modelo dinámico del sistema considerándolo como uno de 3 gdl.

Por lo tanto, se empezará analizando el sistema dinámico usando el formalismo de Euler-Lagrange, por lo que se debe obtener tanto la energía cinética como potencial.

Para el valor de la energía cinética se considera la ecuación (40) ya que se obtendría la misma relación, pero usando las siguientes consideraciones.

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{r}_2^2 + \frac{1}{2}m_i\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_b\dot{r}_b^2 + \frac{1}{2}m_s\dot{r}_s^2 + \frac{1}{2}m_f\dot{r}_f^2 + \frac{1}{2}J_2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}J_i\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}J_b\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}J_s\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}J_f\dot{\theta}^2$$

donde

$$\dot{r}_2^2 = \dot{x}^2 - 2L\dot{x}\dot{\theta}\text{Sen } \theta + L^2\dot{\theta}^2 + 2\dot{x}L\text{Cos } \theta + \dot{L}^2 \quad (77)$$

Y para las expresiones faltantes se consideran los mismos valores expresados en el sistema de 2 gdl. Por lo que al sustituir en la ecuación (40) se obtiene:

$$\begin{aligned} L(x, \dot{x}, \theta, \dot{\theta}) = & \frac{1}{2}m_1\dot{x}^2 \\ & + \frac{1}{2}m_2(\dot{x}^2 - 2L\dot{x}\dot{\theta}\text{Sen } \theta + L^2\dot{\theta}^2 + 2\dot{x}L\text{Cos } \theta + \dot{L}^2) \\ & + \frac{1}{2}m_i\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_b\left(\dot{x}^2 - l_b\dot{x}\dot{\theta}\text{Sen } \theta + \frac{l_b^2}{4}\dot{\theta}^2\right) \\ & + \frac{1}{2}m_s\left(\dot{x}^2 - l_b\dot{x}\dot{\theta}\text{Sen } \theta + \frac{l_b^2}{4}\dot{\theta}^2\right) \\ & + \frac{1}{2}m_f(\dot{x}^2 - 2l_b\dot{x}\dot{\theta}\text{Sen } \theta + l_b^2\dot{\theta}^2) \\ & + \frac{1}{2}m_2(7.24593x10^{-4} + L^2)\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}4.3188x10^{-5}\dot{\theta}^2 \\ & + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{l_b^3}{4}\right) - 9.525x10^{-3}l_b^2 + 1.6129x10^{-4}l_b\right]\dot{\theta}^2 \\ & + \frac{1}{2}[0.06l_b^3 - 2.286x10^{-3}l_b + 2.90322x10^{-5}]\dot{\theta}^2 \\ & + \frac{1}{2}[1.6387x10^{-5} + 0.1(l_b)^2]\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}k_1x^2 - \frac{1}{2}k_2\theta^2 \end{aligned} \quad (78)$$

Para obtener la ecuación que describe la dinámica del primer grado de libertad se hace uso de las ecuaciones (48) y (78), lo cual al desarrollarla por parte se obtiene las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} &= (m_1 + m_2 + m_i + m_b + m_s + m_f)\dot{x} \\ &\quad - (m_2L + 0.5m_b l_b + 0.5m_s l_b + m_f l_b)\dot{\theta} \text{Sen } \theta + m_2 \dot{L} \text{Cos } \theta \end{aligned} \quad (79)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) &= (m_1 + m_2 + m_i + m_b + m_s + m_f)\ddot{x} - m_2 \dot{L} \dot{\theta} \text{Sen } \theta \\ &\quad - (m_2L + 0.5m_b l_b + 0.5m_s l_b + m_f l_b)(\dot{\theta}^2 \text{Cos } \theta \\ &\quad + \ddot{\theta} \text{Sen } \theta) + m_2 \ddot{L} \text{Cos } \theta - m_2 \dot{L} \dot{\theta} \text{Sen } \theta \end{aligned} \quad (80)$$

Simplificando la ecuación (80) se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) &= (m_1 + m_2 + m_i + m_b + m_s + m_f)\ddot{x} - 2m_2 \dot{L} \dot{\theta} \text{Sen } \theta \\ &\quad - (m_2L + 0.5m_b l_b + 0.5m_s l_b + m_f l_b)(\dot{\theta}^2 \text{Cos } \theta \\ &\quad + \ddot{\theta} \text{Sen } \theta) + m_2 \ddot{L} \text{Cos } \theta \end{aligned} \quad (81)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -k_1 x \quad (82)$$

Sustituyendo las ecuaciones (81) y (82) en la ecuación general (48), se obtiene la ecuación dinámica para el primer grado de libertad.

$$\begin{aligned} (m_1 + m_2 + m_i + m_b + m_s + m_f)\ddot{x} - 2m_2 \dot{L} \dot{\theta} \text{Sen } \theta \\ - (m_2L + 0.5m_b l_b + 0.5m_s l_b + m_f l_b)(\dot{\theta}^2 \text{Cos } \theta \\ + \ddot{\theta} \text{Sen } \theta) + m_2 \ddot{L} \text{Cos } \theta + k_1 x + c_1 \dot{x} = f(t) \end{aligned} \quad (83)$$

Sustituyendo las expresiones de masas consideradas en las ecuaciones (61), (63) y (65) se obtiene:

$$\begin{aligned} (m_1 + m_2 + m_i + m_b + m_s + m_f)\ddot{x} - 2m_2 \dot{L} \dot{\theta} \text{Sen } \theta \\ - (m_2L + 0.5(0.75l_b)l_b + 0.5(0.18l_b)l_b \\ + 0.1l_b)(\dot{\theta}^2 \text{Cos } \theta + \ddot{\theta} \text{Sen } \theta) + m_2 \ddot{L} \text{Cos } \theta + k_1 x + c_1 \dot{x} \\ = f(t) \end{aligned} \quad (84)$$

Simplificando la ecuación (84)

$$\begin{aligned}
 & (m_1 + m_2 + m_i + m_b + m_s + m_f)\ddot{x} - 2m_2\dot{L}\dot{\theta}\text{Sen } \theta \\
 & - (m_2L + 0.465l_b^2 + 0.1l_b)(\dot{\theta}^2\text{Cos } \theta + \ddot{\theta}\text{Sen } \theta) \\
 & + m_2\ddot{L}\text{Cos } \theta + k_1x + c_1\dot{x} = f(t)
 \end{aligned} \tag{85}$$

Para el cálculo de la segunda ecuación que describe la dinámica del segundo grado de libertad se hace según las ecuaciones (53) y (78) y desarrollándose por partes se obtiene:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} &= \left( m_2L^2 + \frac{1}{4}m_b l_b^2 + \frac{1}{4}m_s l_b^2 + m_f l_b^2 \right) \dot{\theta} \\
 & - (m_2L + 0.5m_b l_b + 0.5m_s l_b + m_f l_b) \dot{x} \text{Sen } \theta \\
 & - m_2 \dot{x} \dot{L} \dot{\theta} \text{Sen } \theta + J_2 \dot{\theta} + J_i \dot{\theta} + J_b \dot{\theta} + J_s \dot{\theta} + J_f \dot{\theta}
 \end{aligned} \tag{86}$$

Tomando las mismas consideraciones de momentos de inercia de masas como en cálculo de la ecuación del primer gdl. se obtiene:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} &= \left( m_2L^2 + \frac{1}{4}m_b l_b^2 + \frac{1}{4}m_s l_b^2 + m_f l_b^2 \right) \dot{\theta} - (m_2L + 0.5m_b l_b + 0.5m_s l_b \\
 & + m_f l_b) \dot{x} \text{Sen } \theta \\
 & + [ m_2(7.24593x10^{-4} + L^2) + 0.31l_b^3 + 0.0904l_b^2 \\
 & - 2.1247x10^{-3}l_b + 8.86072x10^{-5}] \dot{\theta}
 \end{aligned} \tag{87}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) &= 2m_2L\dot{L}\dot{\theta} + \left( m_2L^2 + \frac{1}{4}m_b l_b^2 + \frac{1}{4}m_s l_b^2 + m_f l_b^2 \right) \ddot{\theta} \\
 & - m_2\dot{L}\dot{x} \text{Sen } \theta \\
 & - (m_2L + 0.5m_b l_b + 0.5m_s l_b + m_f l_b) (\dot{x} \dot{\theta} \text{Cos } \theta \\
 & + \ddot{x} \text{Sen } \theta) + 2m_2L\dot{L}\dot{\theta} \\
 & + [ m_2(7.24593x10^{-4} + L^2) + 0.31l_b^3 + 0.0904l_b^2 \\
 & - 2.1247x10^{-3}l_b + 8.86072x10^{-5}] \ddot{\theta}
 \end{aligned} \tag{88}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -(m_2L + 0.465l_b^2 + 0.1l_b) \dot{x} \dot{\theta} \text{Cos } \theta - m_2 \dot{x} \dot{L} \text{Sen } \theta - k_2\theta \tag{89}$$

Considerando masas equivalentes como en el cálculo del primer gdl. y sustituyendo en las ecuaciones (88) y (89) en la ecuación general (53), se obtiene:

$$\begin{aligned}
 &4m_2L\dot{L}\dot{\theta} - (m_2L + 0.465l_b^2 + 0.1l_b)\ddot{x}\text{Sen } \theta \\
 &+ [m_2(7.24593 \times 10^{-4} + 2L^2) + 0.5425l_b^3 + 0.1904l_b^2 \\
 &- 2.1247 \times 10^{-3}l_b + 8.86072 \times 10^{-5}]\ddot{\theta} + k_2\theta + c_2\dot{\theta} = 0
 \end{aligned} \tag{90}$$

Siguiendo la metodología para el cálculo del tercer grado de libertad se hace según la siguiente ecuación general mediante las ecuaciones de Euler Lagrange.

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{L}} \right) - \frac{\partial L}{\partial L} = \tau \tag{91}$$

Haciendo uso de las ecuaciones (78) y (91) se hace el desarrollo por partes

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{L}} = m_2(\dot{x}\text{Cos } \theta + \dot{L}) \tag{92}$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{L}} \right) = m_2(\ddot{x}\text{Cos } \theta - \dot{x}\dot{\theta}\text{Sen } \theta + \ddot{L}) \tag{93}$$

$$\frac{\partial L}{\partial L} = -m_2\dot{x}\dot{\theta}\text{Sen } \theta + m_2L\dot{\theta}^2 + m_2L\dot{\theta}^2 \tag{94}$$

Sustituyendo las ecuaciones (93) y (94) en la ecuación general (91) se obtiene:

$$m_2(\ddot{x}\text{Cos } \theta - \dot{x}\dot{\theta}\text{Sen } \theta + \ddot{L}) + m_2\dot{x}\dot{\theta}\text{Sen } \theta - m_2L\dot{\theta}^2 - m_2L\dot{\theta}^2 = 0 \tag{95}$$

Simplificando la ecuación (95) se obtiene:

$$m_2(\ddot{x}\text{Cos } \theta - 2L\dot{\theta}^2 + \ddot{L}) = 0 \tag{96}$$

Por lo tanto, para describir la dinámica del sistema de tres grados de libertad se hace uso de las ecuaciones (85), (90) y (96):

$$\begin{aligned}
& (m_1 + m_2 + m_i + m_b + m_s + m_f)\ddot{x} - 2m_2\dot{L}\dot{\theta}\text{Sen } \theta \\
& - (m_2L + 0.465l_b^2 + 0.1l_b)(\dot{\theta}^2\text{Cos } \theta + \ddot{\theta}\text{Sen } \theta) + m_2\ddot{L}\text{Cos } \theta + k_1x + c_1\dot{x} \\
& = f(t)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 4m_2L\dot{L}\dot{\theta} - (m_2L + 0.465l_b^2 + 0.1l_b)\ddot{x}\text{Sen } \theta \\
& + [m_2(7.24593 \times 10^{-4} + 2L^2) + 0.5425l_b^3 + 0.1904l_b^2 - 2.1247 \times 10^{-3}l_b \\
& + 8.86072 \times 10^{-5}] \ddot{\theta} + k_2\theta + c_2\dot{\theta} = \tau(t)
\end{aligned}$$

$$m_2(\ddot{x}\text{Cos } \theta - 2L\dot{\theta}^2 + \ddot{L}) = \tau(t)$$

Se debe tener en cuenta que si  $L(t)$  es constante (es decir,  $\tau(t) = 0$ ) el esquema de control de vibraciones se vuelve puramente pasivo y las ecuaciones de movimiento no lineales se pueden resolver utilizando el método de escalas múltiples que dan como resultado las expresiones de respuesta de estado estable del sistema global que se puede utilizar para sintetizar un esquema de control semiactivo calculando la longitud óptima del absorbedor de péndulo autoparamétrico [21] [22].

### 5. Resultados Numéricos y Experimentales

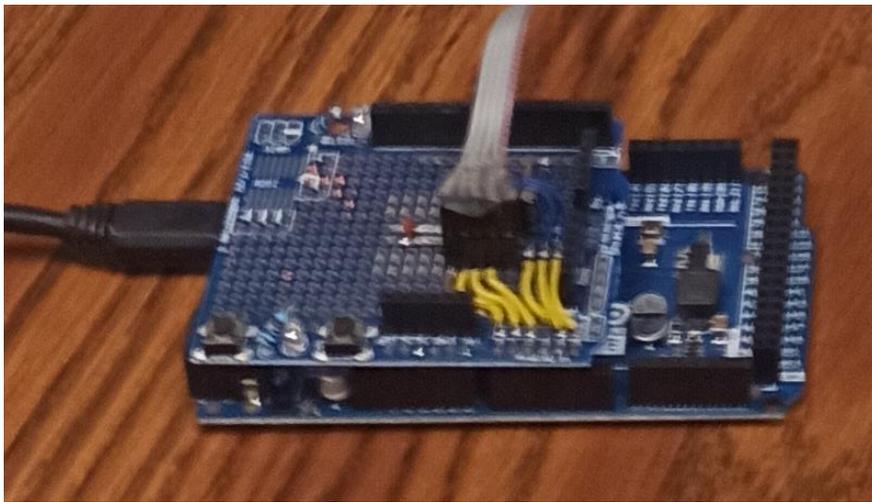
En el siguiente capítulo se hace énfasis en obtener evidencia del comportamiento físico experimental, que permita dar robustez a las teorías y resultados analíticos antes mostrados.

El sistema primario consiste en un piso rígido con masa  $m_1$  conectado a la placa de la base por columnas flexibles con rigidez equivalente  $k_1$  la cual es obtenida considerando cuatro elementos elásticos en paralelo, con rigidez lateral  $12EI/L^3$ , donde  $E$  representa el módulo de Young (aluminio),  $I$  representa el momento de inercia de área y  $L$  la longitud (ver Figura 21). Este sistema primario es afectado por la aceleración armónica en la base  $\ddot{Z} = -F\omega^2 \sin \omega t$  con amplitud  $F\omega^2$  y frecuencia de excitación  $\omega$ . La señal de excitación se proporcionará por medio de un robot paralelo de 6 grados de libertad conocido como hexápodo, el cual será manipulado en tiempo real dentro de la plataforma Matlab-Simulink. Es importante mencionar que con esta plataforma se podrá excitar 3 movimientos de traslación y 3 movimientos de rotación, pero para este caso es particular, solo será necesario una excitación uniaxial (eje  $z$ ).



Figura 21 Sistemas primario y secundario acoplados.

Para medir la aceleración sobre la masa  $m_1$  del sistema primario se utilizó un acelerómetro triaxial (modelo: ADXL335), pequeño (4 mm x 4 mm x 1.45 mm) y de baja potencia (350  $\mu A$ ) con un rango de medida de  $\pm 3 g$ , sensibilidad de 330 mV/g y voltaje de alimentación de 1.8 V a 3.6 V. Para registrar la señal del sensor antes mencionado, se utiliza un microcontrolador Arduino Due (ver Figura 22). Este sistema de adquisición de datos posee 54 pines digitales de entrada y salida (de los cuales 12 pueden ser usados como salidas de modulación por ancho de pulsos, PWM, por sus siglas en inglés), 12 entradas análogas, 2 salidas análogas, 4 UART (puertas seriales por hardware). Finalmente, se desarrolló un programa en el software Python (el cual es de código abierto) para realizar la lectura del sensor con una frecuencia de muestreo de 5,000 Hz y guardar los datos para poder graficarlos en Matlab-Simulink.



*Figura 22 Sistema de adquisición de datos.*

## **5.1 Estimación de parámetros modales**

### **5.1.1 Sistema primario**

Para obtener los parámetros modales (frecuencia natural ( $\omega_n$ ) y razón de amortiguamiento ( $\zeta$ )) se emplea el método conocido como Peak Picking. Este método se basa en un modelo modal en el dominio de la frecuencia dando como resultado una estimación local de los polos del sistema (parámetros modales). Esta técnica se fundamenta en el hecho de que la Función de Respuesta en Frecuencia (FRF) tiene un máximo alrededor de la(s) frecuencia(s) natural(es) (resonancias) [16].

Primero se obtiene la respuesta libre de la estructura tipo edificio (ver Figura 23). Debido al sensor que se está utilizando, la respuesta libre, antes mencionada, está en términos de la aceleración  $\ddot{z}(t)$ . Una vez que se adquieren los datos de la respuesta libre, se aplica la Transformada Rápida de Fourier (FFT, por sus siglas en inglés), para obtener la respuesta en el dominio de la frecuencia (ver Figura 24).

La frecuencia en la cual se presenta el pico máximo proporciona el valor de la frecuencia natural amortiguada ( $\omega_d$ ). Con el método de la potencia media, se puede calcular un estimado de la razón de amortiguamiento ( $\zeta$ ). Se escogen dos frecuencias ( $\omega_1, \omega_2$ ) cercanas a  $\omega_d$ , de tal forma que  $\omega_1 < \omega_d < \omega_2$  y cuyos valores cumplan

$$|A(\omega_1)| = |A(\omega_2)| = \frac{|A(\omega_d)|}{\sqrt{2}} \quad (97)$$

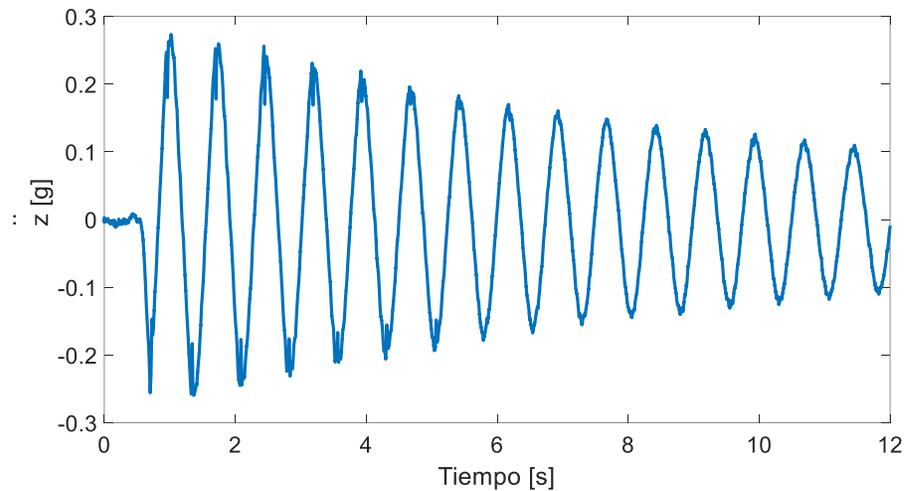


Figura 23 Respuesta libre del sistema primario ante una condición inicial de posición.

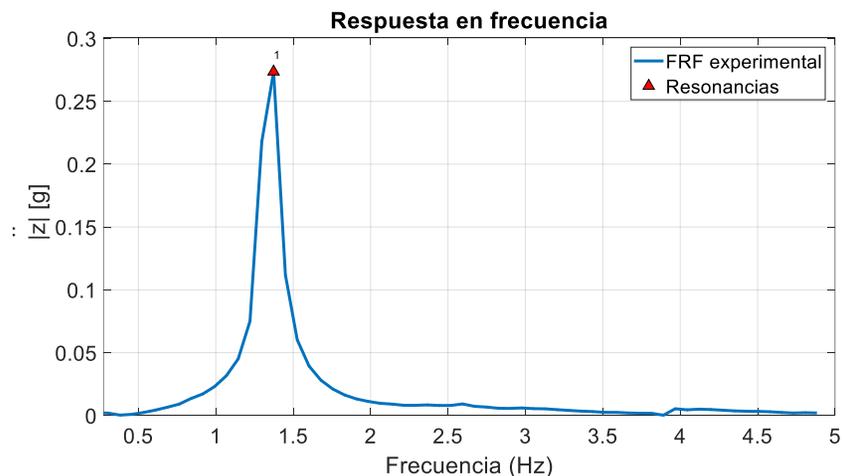


Figura 24 Transformada Rápida de Fourier de la respuesta libre de la estructura tipo edificio.

De la Figura 24 se obtienen los siguientes valores:

$$A_d = 0.27 g$$

$$\omega_d = 1.3716$$

$$\omega_1 = 1.2664$$

$$\omega_2 = 1.4$$

Posteriormente, la razón de amortiguamiento ( $\zeta$ ) asociada al sistema primario se calcula con la siguiente expresión

$$\zeta = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2\omega_d} \quad (98)$$

Por lo tanto

$$\zeta = \frac{1.4 - 1.2664}{2(1.3716)} = 0.0487$$

Para determinar la frecuencia natural de la estructura tipo edificio, se realizará un despeje de la siguiente ecuación

$$\omega_d = \sqrt{1 - \zeta^2} \omega_n \quad (99)$$

Dando como resultado

$$\omega_n = \frac{\omega_d}{\sqrt{1 - \zeta^2}} = 1.3733 \text{ Hz}$$

La Tabla 3 contiene los parámetros modales asociados a la estructura tipo edificio en su primer modo de vibración.

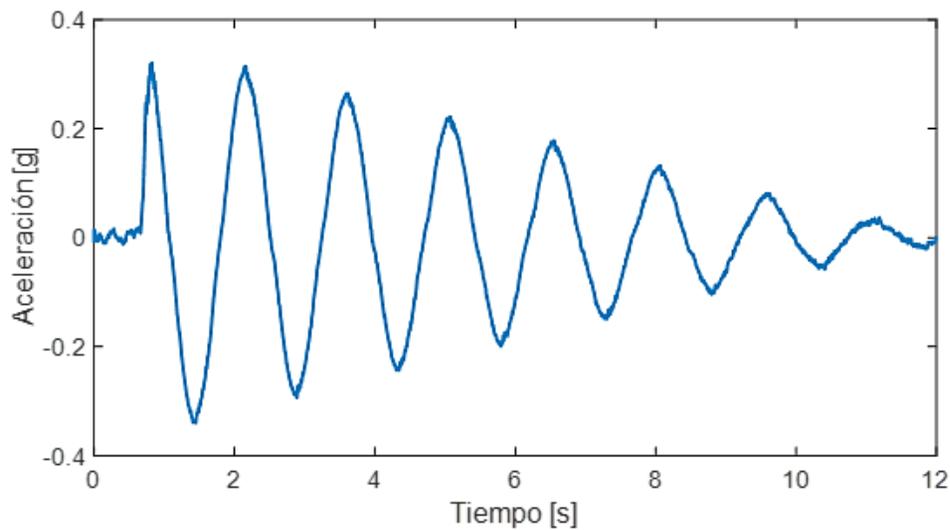
*Tabla 3 Parámetros modales del sistema primario.*

Modo de vibración	Frecuencia natural ( $\omega_n$ )	Razón de amortiguamiento ( $\zeta$ )
1	1.3733 Hz	0.0487

### 5.1.2 Sistema secundario

Para permitir la atenuación de las vibraciones asociadas al primer modo de vibración del sistema primario, se utiliza un absorbedor tipo péndulo restringido a oscilar en un plano horizontal (sistema secundario) con masa efectiva  $m_1$  y movimiento lateral  $\theta$  (ver Figura 21).

El sistema secundario se debe de diseñar de tal forma que su frecuencia natural sea la mitad de la frecuencia natural del sistema primario (ver ecuación (70)), entonces, se procede a determinar, de manera experimental y aproximada sus parámetros modales. La Figura 25 muestra la respuesta temporal del sistema secundario (en términos de la aceleración  $\ddot{\theta}(t)$ ) cuando se perturba por una condición inicial de posición. La respuesta del sistema secundario en el dominio de la frecuencia ante la perturbación en su condición inicial de posición se muestra en la Figura 26.



*Figura 25 Respuesta libre del sistema secundario.*

Empleando la técnica Peak Picking y utilizando las ecuaciones (98) y (99) se determina la frecuencia natural y razón de amortiguamiento asociadas al absorbedor de vibraciones. El valor de estos parámetros se muestra en la Tabla 4.

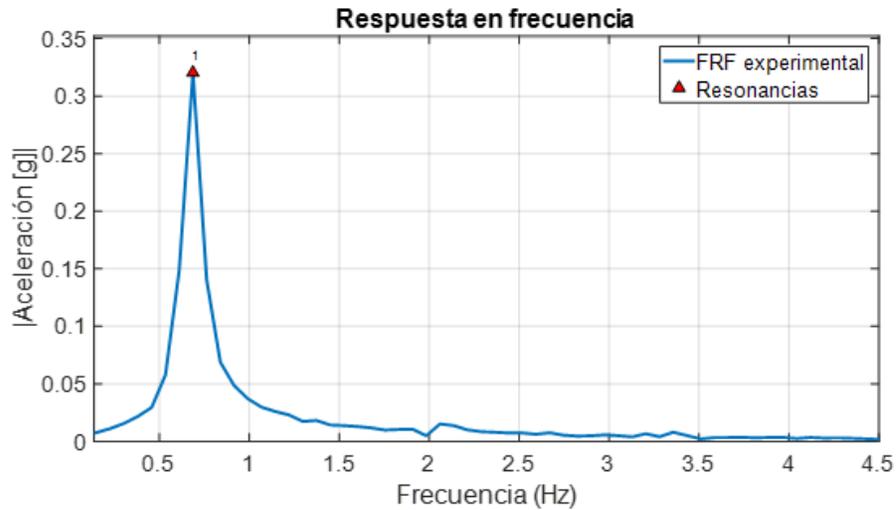


Figura 26 Transformada Rápida de Fourier de la respuesta libre del sistema secundario.

Tabla 4 Parámetros modales del sistema secundario.

Modo de vibración	Frecuencia natural ( $\omega_n$ )	Razón de amortiguamiento ( $\zeta$ )
1	0.6867 Hz	0.0487

## 5.2 Determinación de las características físicas del sistema primario y secundario (masa, rigidez, amortiguamiento viscoso)

La vibración libre de un sistema de resorte-masa-amortiguador de un grado de libertad está dado por la ecuación (4) anteriormente mostrada, por lo que se considera importante obtener sus características físicas para determinar futuros resultados.

Por lo tanto, usando los datos obtenidos en la Tabla 3 y las ecuaciones (2) y (8) se procede a su cálculo.

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}} = 1.3733 \text{ Hz} = 8.6287 \text{ rad/s}$$

donde

$$k_1 = \text{rigidez equivalente de las 4 columnas de aluminio} = 48EI/L^3$$

$$E = \text{Módulo de elasticidad del aluminio} = 70 \text{ GPa}$$

$$I = \text{Segundo momento de inercia} = \frac{bh^3}{12} = 6.8066 \times 10^{-11} \text{ m}^4$$

$$L = \text{Longitud de las columnas} = 1 \text{ m}$$

Por lo tanto

$$k_1 = \text{Rigidez equivalente de las columnas} = 228.7017 \text{ N/m}$$

$$m_1 = \text{masa del sistema primario} = 3.0717 \text{ kg}$$

Y de la ecuación (8)

$$\begin{aligned} c_1 &= \text{Amortiguamiento del sistema primario} = 2m\zeta\omega_n = 2(3.0717)(0.0487)(8.6287) \\ &= 2.5815 \frac{Ns}{m} \end{aligned}$$

Para la obtención de los datos del sistema secundario se hace uso de la ecuación (68) y la frecuencia natural obtenida de los resultados experimentales

$$\begin{aligned} k_2 &= \left(\frac{\omega_n^2}{4}\right)(m_2(7.24593 \times 10^{-4} + 2L^2) + 0.5425l_b^3 + 0.190475l_b^2 - 2.12471 \times 10^{-3}l_b + 8.86072 \times 10^{-5}) \\ &= \left(\frac{(4.3146)^2}{4}\right)(m_2(7.24593 \times 10^{-4} + 2(0.3)^2) + 0.5425(0.61391)^3 \\ &\quad + 0.190475(0.61391)^2 - 2.12471 \times 10^{-3}(0.61391) + 8.86072 \times 10^{-5}) = 4.92 \frac{Nm}{rad} \end{aligned}$$

### 5.3 Comparación de resultados experimentales y numéricos

Para poder obtener un resultado preliminar del resultado esperado después del análisis experimental se procede a obtener las mismas respuestas dinámicas en el programa Simulink comparadas con las obtenidas mediante acelerómetro y placa Arduino.

Como primer análisis se hace una comparación entre la respuesta ante vibración libre del sistema primario sin fuerzas externas y con condición inicial de posición mostrado en la Figura 27.

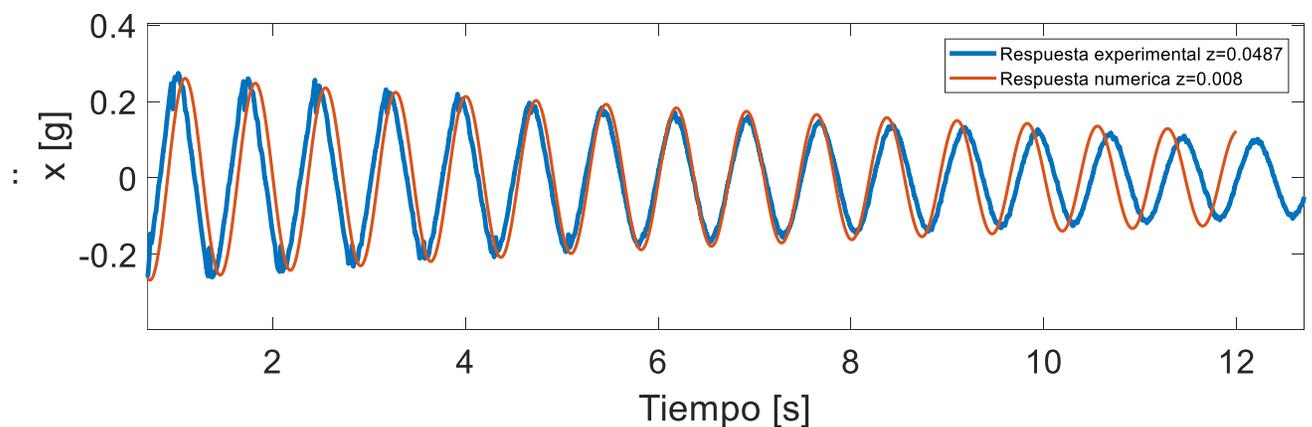


Figura 27 Comparación de la respuesta libre del sistema primario.

El segundo análisis se hace una comparación entre la respuesta ante vibración libre del sistema secundario sin fuerzas externas y con condición inicial de posición mostrado en la Figura 28.

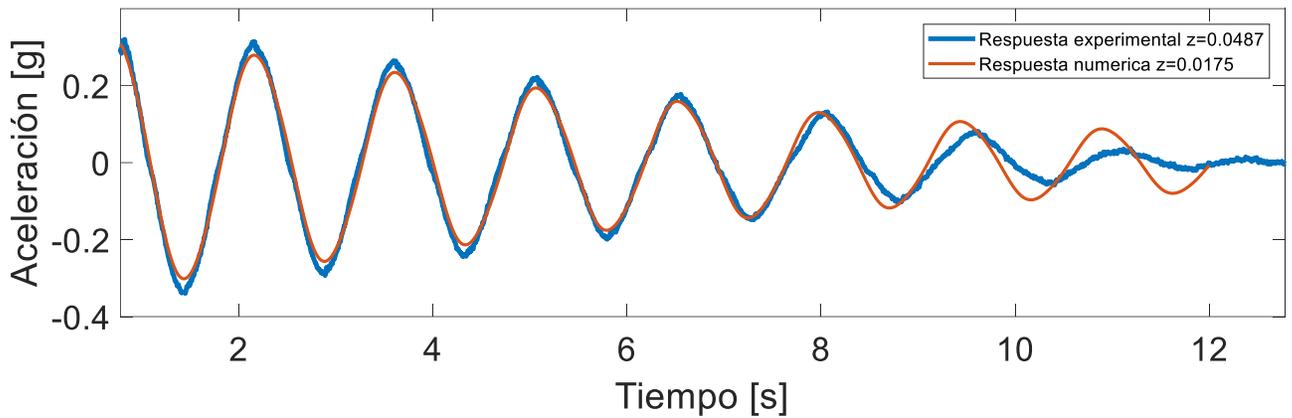


Figura 28 Comparación de la respuesta libre del sistema secundario.

Una vez obtenidas las respuestas semejantes al resultado experimental se obtienen los parámetros del sistema como se muestra en la Tabla 5 y se procede a introducir la aceleración en la base del sistema primario de la forma  $\ddot{Z} = -F\omega^2 \sin \omega t$  y obtener la respuesta sin uso de absorbedor de vibración y con absorbedor, la cual al ser los datos lo más parecidos a los experimentales, una vez que se obtenga la respuesta experimental del sistema con excitación externa tendrían que ser datos muy cercanos a la Figura 29.

Tabla 5 Parámetros previos a los experimentales del absorbedor de vibraciones.

$m_1 = 1.7584 \text{ kg}$	$m_2 = 0.3774 \text{ kg}$	$m_b = 0.4604 \text{ kg}$	$k_1 = 228.7017 \text{ N/m}$	$k_2 = 4.9195 \text{ Nm/rad}$
$m_f = 0.1 \text{ kg}$	$m_i = 0.265 \text{ kg}$	$m_s = 0.1105 \text{ kg}$	$c_1 = 0.424 \text{ Ns/m}$	$c_2 = 0.04 \text{ Nms/rad}$
$L = 0.3 \text{ m}$	$l_b = 0.6139 \text{ m}$	$\omega_n = 8.6286 \text{ rad/s}$	$\Omega = 8.6286 \text{ rad/s}$	$\theta_0 = 0.03 \text{ rad}$

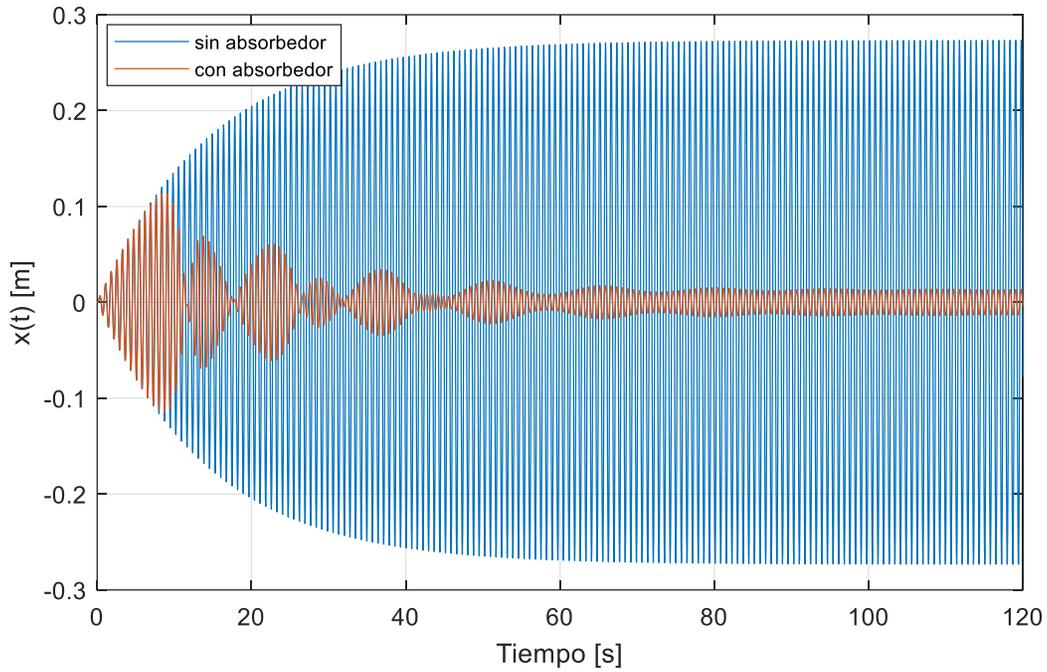


Figura 29 Respuesta numérica del sistema primario ante excitación en su base.

Al observar la Figura 29 se pueden visualizar atenuaciones de la amplitud de la vibración importantes en el sistema primario de hasta 95% de absorción de la energía, por lo cual podemos esperar muy buenos resultados del análisis experimental.

De igual modo se obtiene la respuesta del sistema secundario durante la interacción autoparamétrica.

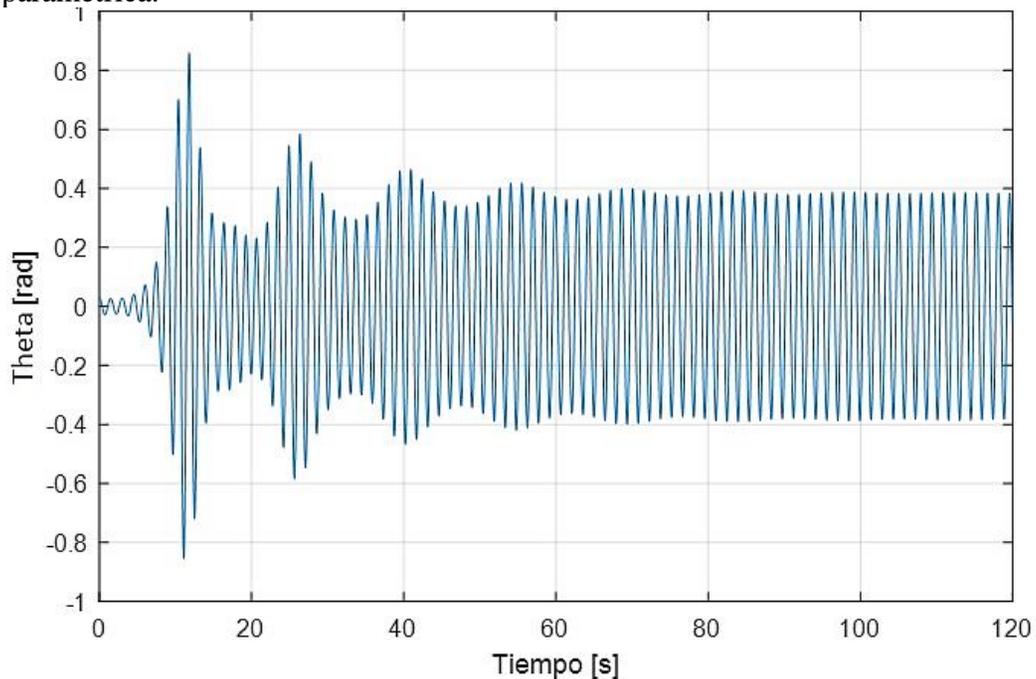


Figura 30 Respuesta numérica del sistema secundario ante interacción autoparamétrica.

Usando el procedimiento del tema 4.3 se procede a obtener las respuestas frecuenciales aproximadas de la Figura 29 y Figura 30 mediante el uso del Método de Escalas Múltiples por lo que se obtienen las gráficas en el dominio en la frecuencia representadas en la Figura 31, Figura 32 y Figura 33.

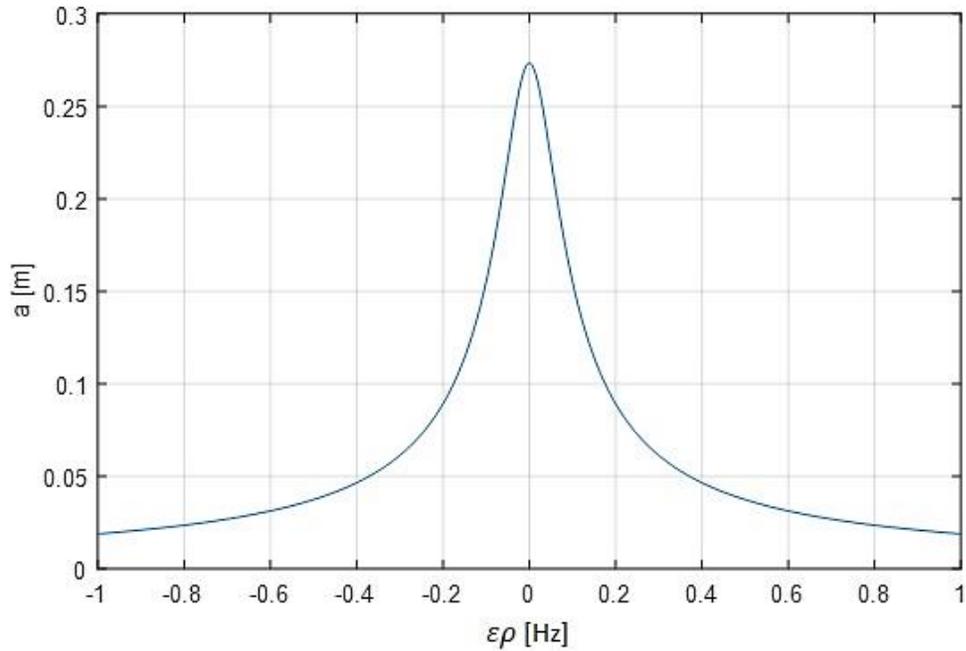


Figura 31 Respuesta frecuencial aproximada del sistema primario sin interacción autoparamétrica.

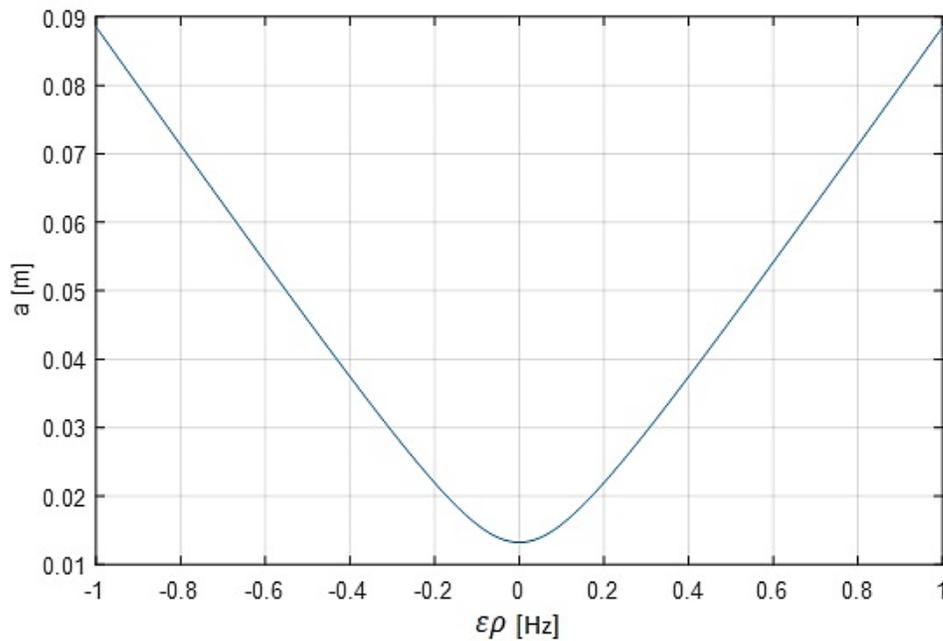


Figura 32 Respuesta frecuencial aproximada del sistema primario con interacción autoparamétrica.

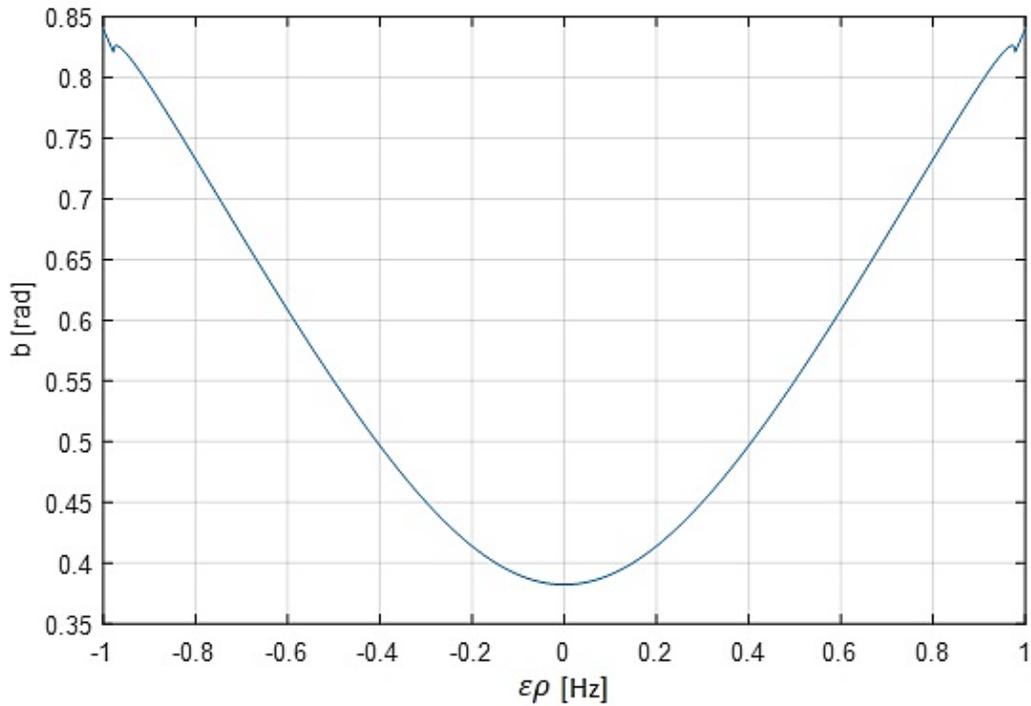


Figura 33 Respuesta frecuencial aproximada del sistema secundario durante la interacción autoparamétrica.

#### 5.4 Esquema de control propuesto de 2gdl

Para mejorar la respuesta del sistema en configuración pasiva del sistema, se propone el uso de un control semi-activo de vibraciones que permita mover la masa  $m_2$  de tal modo que permita obtener la mejor posición a modo que se asegure la sintonización interna más exacta y en menor tiempo comparado con su configuración pasiva, obteniendo una correcta absorción de energía en el sistema.

A continuación, se muestra la estructura básica del control propuesto, basada en un control realimentado como se muestra en la Figura 34.

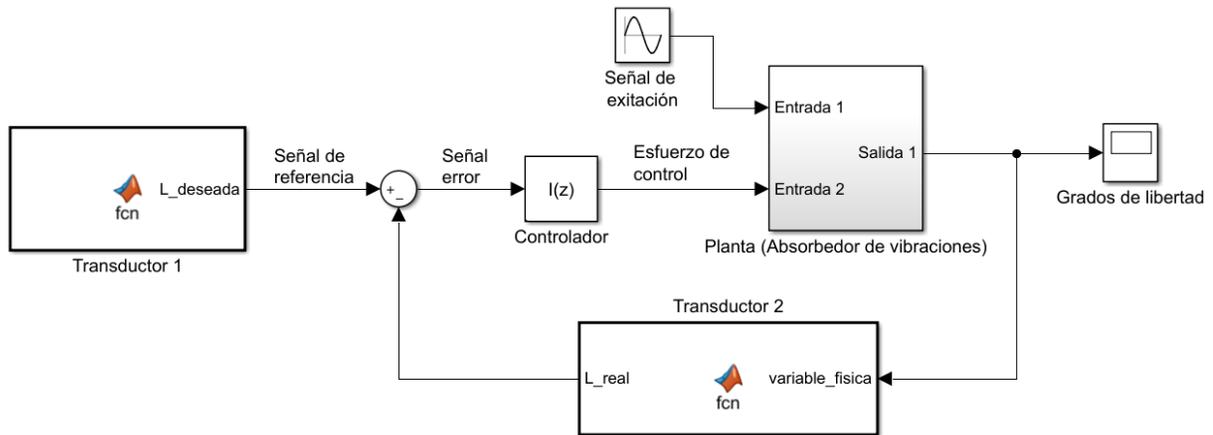


Figura 34 Estructura básica de control de 2gdl.

### Planta (Absorbedor de vibraciones)

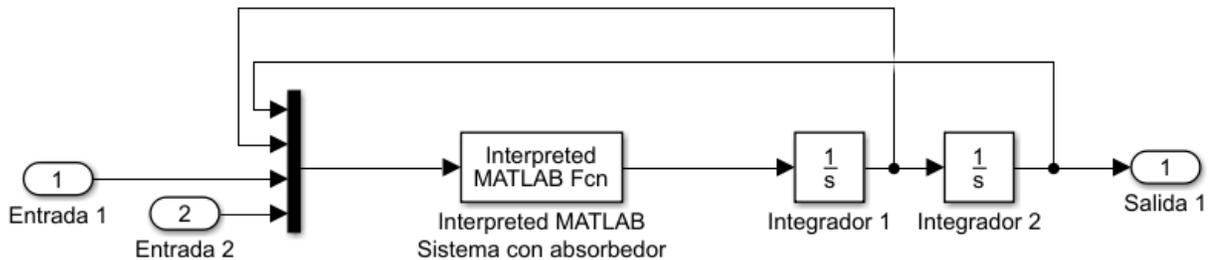


Figura 35 Diagrama esquemático del sistema en 2gdl.

En la Figura 35 se describe la composición básica del sistema, el cual usa las ecuaciones dinámicas (52) y (68). Despejando la variable de mayor orden y mediante los integradores que correspondan se obtiene el comportamiento de los grados de libertad respecto al tiempo en la Salida 1, en la Entrada 1 se ingresa la señal de perturbación de tipo senoidal la cual se encarga de excitar al sistema en su frecuencia natural o cercana a ella, en la Entrada 2 se proporciona la posición de la masa efectiva del péndulo ( $L$ ), la cual define la frecuencia natural del sistema secundario ( $\omega_{abs}$ ).

### Transductor 1

Este transductor se encarga de obtener el valor de  $L$  deseada óptima para mantener la sintonización interna en el sistema, basada en las condiciones de sintonización establecidas por Haxton y Barr mostradas en las ecuaciones (70), como se muestra a continuación:

$$\omega_n = 2\omega_{abs}$$

Sustituyendo las frecuencias naturales de ambos subsistemas de las ecuaciones (52) y (68) y se encuentra:

$$\omega_n = 2 \sqrt{\frac{k_2}{m_2(7.24593 \times 10^{-4} + 2L^2) + 0.5425l_b^3 + 0.190475l_b^2 - 2.12471 \times 10^{-3}l_b + 8.86072 \times 10^{-5}}} \quad (100)$$

Al despejar de la ecuación (100) el valor de  $L$  se obtiene la siguiente ecuación:

$$L = \sqrt{\frac{\left(\frac{4k_2}{\omega_n^2}\right) - 7.24593 \times 10^{-4} - 0.5425l_b^3 - 0.190475l_b^2 + 2.12471 \times 10^{-3}l_b - 8.86072 \times 10^{-5}}{2m_2}} \quad (101)$$

## Transductor 2

Este transductor usa la ecuación (52) la cual describe la dinámica del primer grado de libertad y se despeja el valor de  $L_{real}$ , al factorizar y despejar el valor de  $L$  se obtiene la siguiente ecuación:

$$L = \frac{F \operatorname{sen} \omega t - k_1 x - c_1 \dot{x} - (m_1 + m_2 + m_i + m_b + m_s + m_f) \ddot{x}}{(\ddot{\theta}^2 \operatorname{Cos} \theta - \ddot{\theta} \operatorname{Sen} \theta) m_2} \quad (102)$$

$$= \frac{0.465l_b^2 + 0.1l_b}{m_2}$$

A pesar de que el control funciona correctamente, la desventaja de este procedimiento como se puede observar en la ecuación (102) para obtener el valor de  $L_{real}$  se requiere el comportamiento físico de los grados de libertad, así como sus respectivas velocidades y aceleraciones, lo cual en términos prácticos se necesitaría de varios sensores y diversos sistemas, los cuales aumentan el costo del control y análisis de datos.

## Controlador

Cuando el controlador recibe un valor de cero percibe que el sistema se encuentra trabajando correctamente, pero si la señal de error (diferencia entre  $L_{deseada}$  y  $L_{real}$ ), es diferente de cero, el controlador usa el valor de una ganancia proporcional, una integral y una derivativa para modificar la señal de error y proporcionar un esfuerzo de control el cual modifica el valor de  $L$  dentro de la planta hasta mantener la señal de error de nuevo en cero.

## Señal de excitación

Esta señal es la que perturba al sistema, mediante oscilaciones periódicas de tipo senoidales con frecuencia igual o muy cercana a la frecuencia natural del sistema primario ( $F \text{ sen } \omega t$ ) y ocasiona que el sistema trabaje en resonancia.

### 5.4.1 Aplicación del control semi-activo de 2gdl

Para obtener las ganancias del control que más se adapten al sistema se opta por usar el método de Ziegler-Nichols, en la cual se propusieron reglas para determinar los valores de la ganancia proporcional  $K_p$ , del tiempo integral  $T_i$  y del tiempo derivativo  $T_d$ , basándose en las características de respuesta transitoria de una planta dada [23].

Según el método requerido, primero se fija  $T_i = \infty$  y  $T_d = 0$ . Usando solo la acción de control proporcional, se incrementa  $K_p$  desde 0 hasta un valor crítico  $K_{cr}$  en donde la salida presente muestra oscilaciones sostenidas. Así, la ganancia crítica  $K_{cr}$  y el periodo  $P_{cr}$  correspondiente se determinan experimentalmente. Ziegler-Nichols sugirieron que se establecieran los valores de los parámetros  $K_p$ ,  $T_i$  y  $T_d$  de acuerdo con la fórmula que se muestra en la Tabla 6.

Tabla 6 Reglas de sintonización de Ziegler-Nichols basada en la ganancia crítica  $K_{cr}$  y periodo crítico  $P_{cr}$  [23].

Tipo de controlador	$K_p$	$T_i$	$T_d$
P	$0.5K_{cr}$	$\infty$	0
PI	$0.45K_{cr}$	$\frac{1}{1.2} P_{cr}$	0
PID	$0.6K_{cr}$	$0.5P_{cr}$	$0.125P_{cr}$

Siguiendo la metodología se procede a obtener la amplitud sostenida, apoyándonos del programa Matlab Simulink como se muestra en la Figura 36, obteniendo valores de  $K_{cr}$  de 4 y  $P_{cr}$  de 1.1, al resolver las fórmulas de la Tabla 6 se obtiene la Tabla 7.

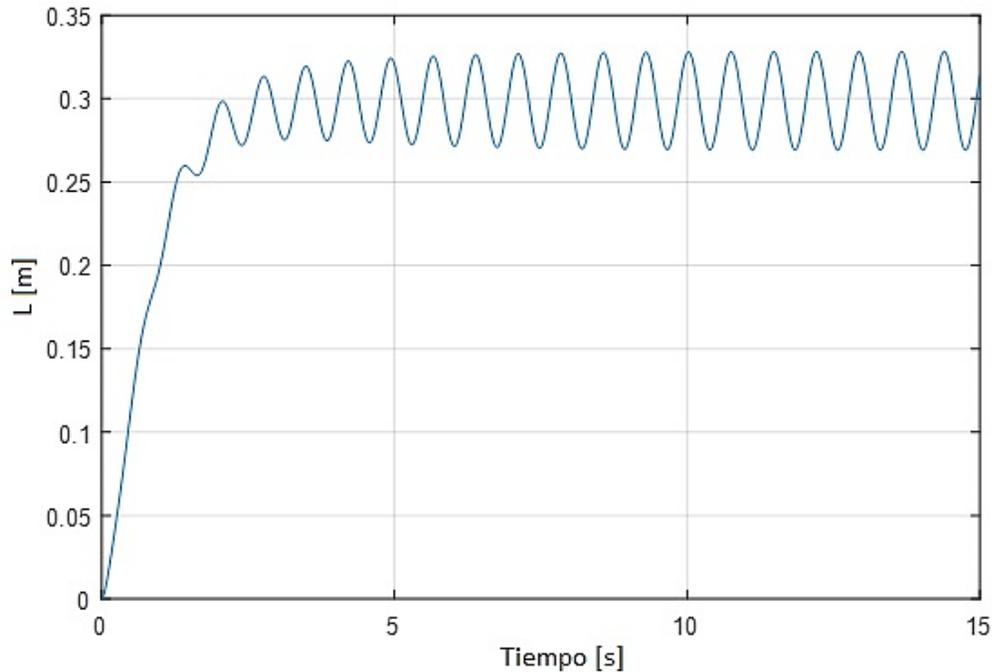


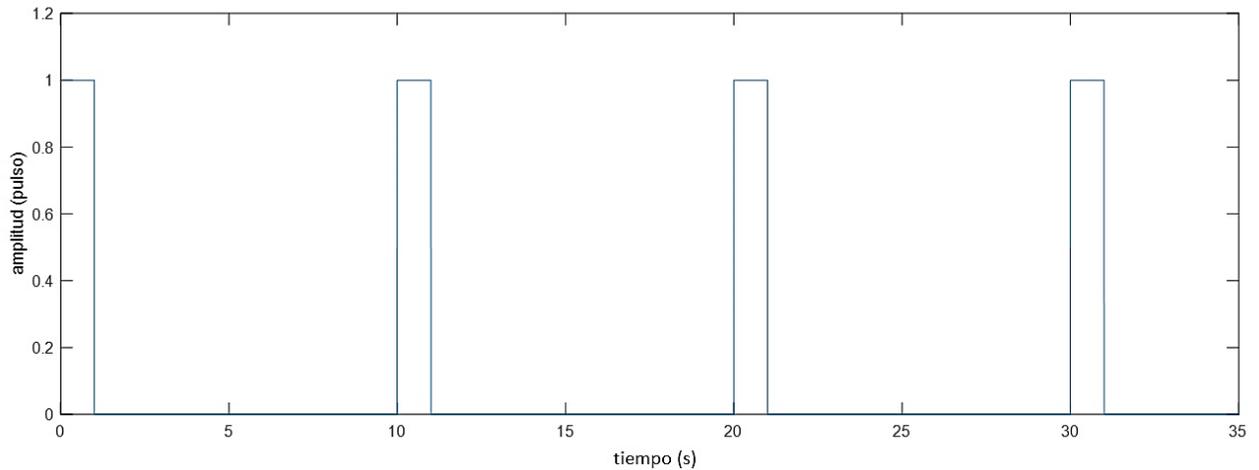
Figura 36 Amplitud sostenida del sistema secundario.

Tabla 7 Resultados de usar la regla de Ziegler-Nichols.

Tipo de controlador	$K_p$	$T_i$	$T_d$
P	2	$\infty$	0
PI	1.8	0.916	0
PID	2.4	0.55	0.1375

Después de comprobar los resultados y con el apoyo de la herramienta “PID tuning tool” incluida en Matlab Simulink, tomando en cuenta una respuesta rápida y robusta, el control que proporcionaba estos requerimientos de forma más adecuada y menor uso de recursos computacionales es el control integral, a continuación, se muestra el desarrollo del control y sus resultados.

Para permitir un control semi-activo del sistema, es necesario que el control no se encuentre funcionando todo el tiempo, por lo cual se optó por el uso de pulsos con un periodo de 10 seg. y un tamaño de 1 seg. cada uno como se muestra en la Figura 37. Por lo que al aplicar los pulsos permite trabajar al control un breve tiempo hasta que esta manda una señal de cero, lo cual desactiva el control, de este modo se disminuye el gasto de energía por parte del servomotor, el cual se encarga de modificar la posición de la masa efectiva del absorbedor  $m_2$ .



*Figura 37 Pulsos necesarios para permitir el control semi-activo.*

Con el objetivo de mostrar el comportamiento del sistema se optó por darle un cambio de frecuencias de excitación, la primera es la frecuencia natural, permitiendo hacer trabajar al sistema en resonancia donde  $\Omega = \omega_1 = 2\omega_2 = 8.628 \text{ rad/s}$  durante los primeros 80 segundos, después se intercambia la frecuencia con un valor de  $\Omega = 8.253 \text{ rad/s}$  por otros 80 segundos y los últimos 80 segundos con una frecuencia de  $\Omega = 8.846 \text{ rad/s}$ .

La Figura 38 muestra el comportamiento del sistema primario haciendo uso del absorbedor se mantiene en una amplitud muy baja, comparándola con su respuesta sin uso del absorbedor, y si nos fijamos en el control a pesar de los cambios repentinos en la frecuencia la velocidad de respuesta del control mantiene una amplitud satisfactoria.

Al observar la Figura 39 se puede ver el comportamiento del sistema secundario, el cual mantiene una alta amplitud de oscilación a pesar de los cambios en la frecuencia, lo cual se traduce en una alta absorción de energía en el sistema.

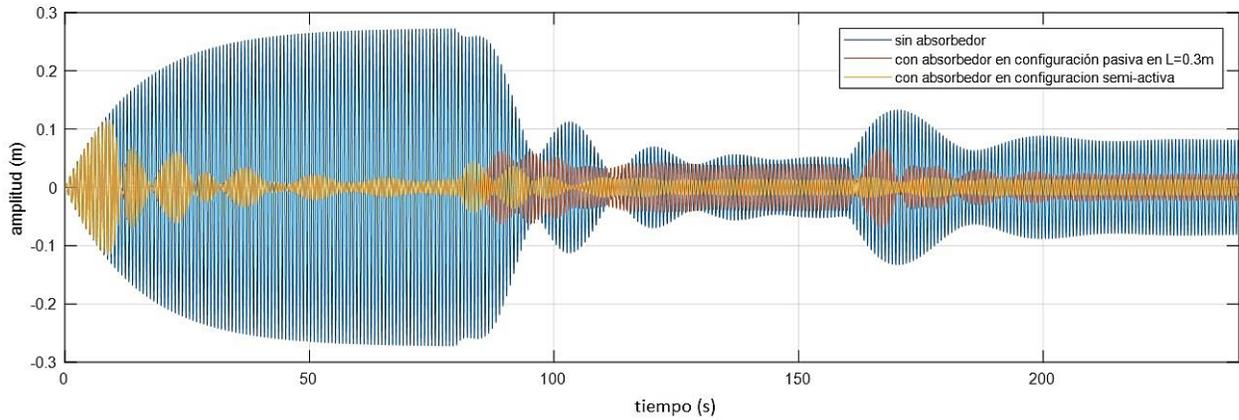


Figura 38 Comparación del comportamiento del sistema primario ante cambio frecuencial en diversas condiciones.

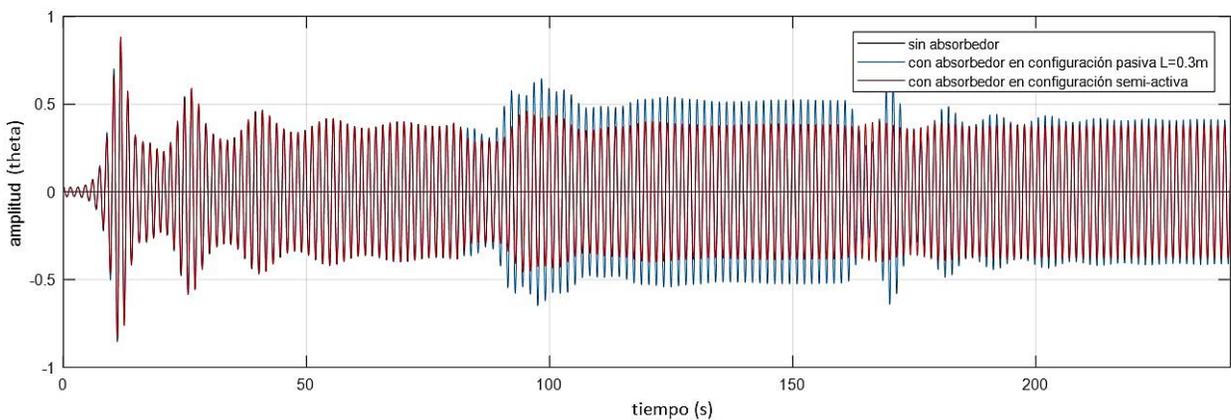


Figura 39 Comparación del comportamiento del sistema secundario ante cambio frecuencial en diversas condiciones.

Para el control semi-activo, la masa efectiva  $m_2$  necesita tomar la posición más adecuada según se requiera, en el menor tiempo posible, permitiendo que el sistema mantenga una mínima amplitud de respuesta y de este mismo modo permitir las condiciones óptimas de absorción de vibración, como también un mayor ancho de banda de frecuencias alrededor de la condición más crítica de trabajo como es la resonancia.

Al conocer las frecuencias de excitación y basándonos en las condiciones de sintonización mostradas en la ecuación (70), podemos obtener el valor de  $L$  óptimo y ante el cambio frecuencial mostrado en la Figura 38, se obtienen 3 valores de  $L$  óptimos mostrados en la Figura 40.

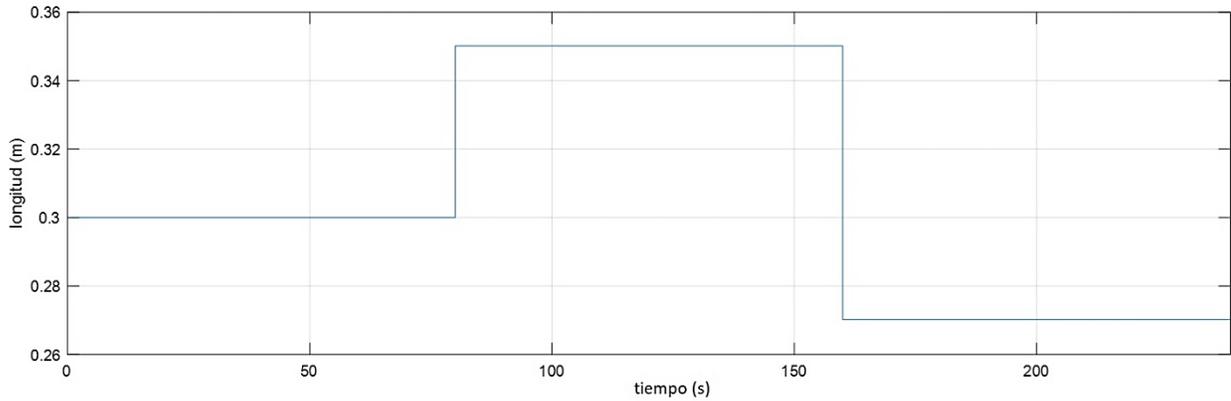


Figura 40 Valor de  $L$  deseada para uso en el control semi-activo.

Al obtener la diferencia entre los valores del  $L$  deseada y  $L$  real podemos obtener el valor del error el cual se usa en la entrada del control, como se muestra en la Figura 41. Si los valores del error son más cercanos a cero mejor es el control de la señal.

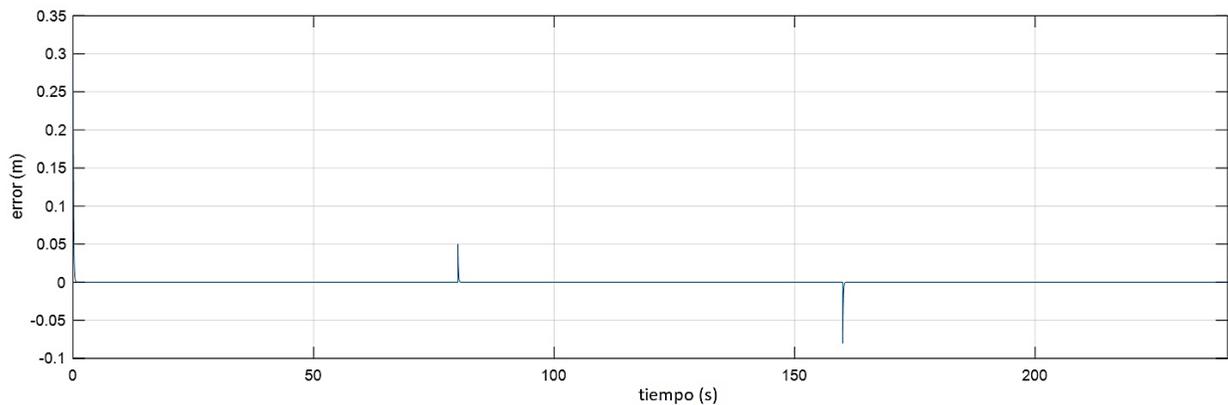


Figura 41 Señal error.

Una vez el control recibe la señal de error e implementando el control integral en Simulink se obtiene la señal necesaria para ingresar al sistema (ver Figura 42) y permitir una respuesta rápida y robusta

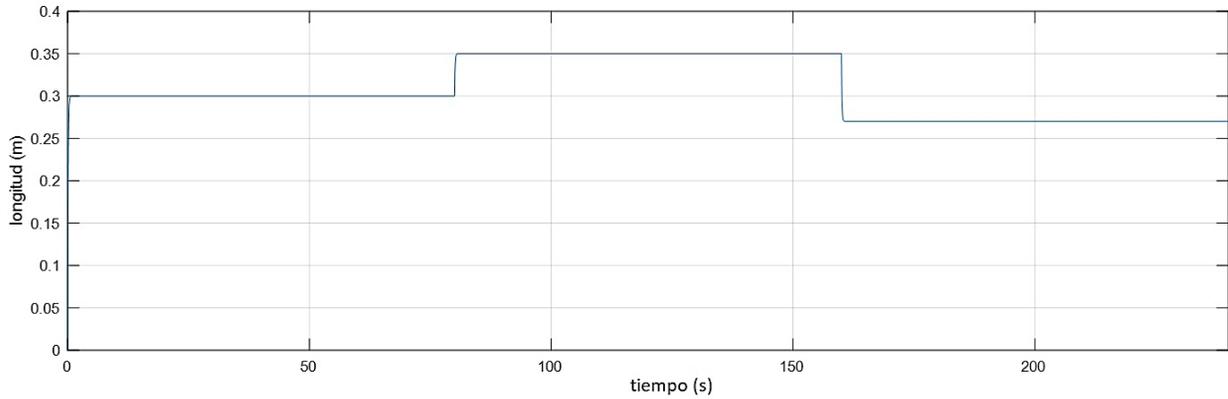


Figura 42 Esfuerzo de control usando control integral.

### 5.5 Estructura de control propuesto de 3gdl basada ecuaciones obtenidas con el método de escalas múltiples (MEM)

Aprovechando la respuesta de la amplitud en el dominio frecuencial del sistema primario mostrado en la ecuación (75) mostrada con anterioridad, se optó por obtener un control basado en esta relación.

A continuación, se muestra la estructura básica del control propuesto, basada en un control realimentado como se muestra en la Figura 43.

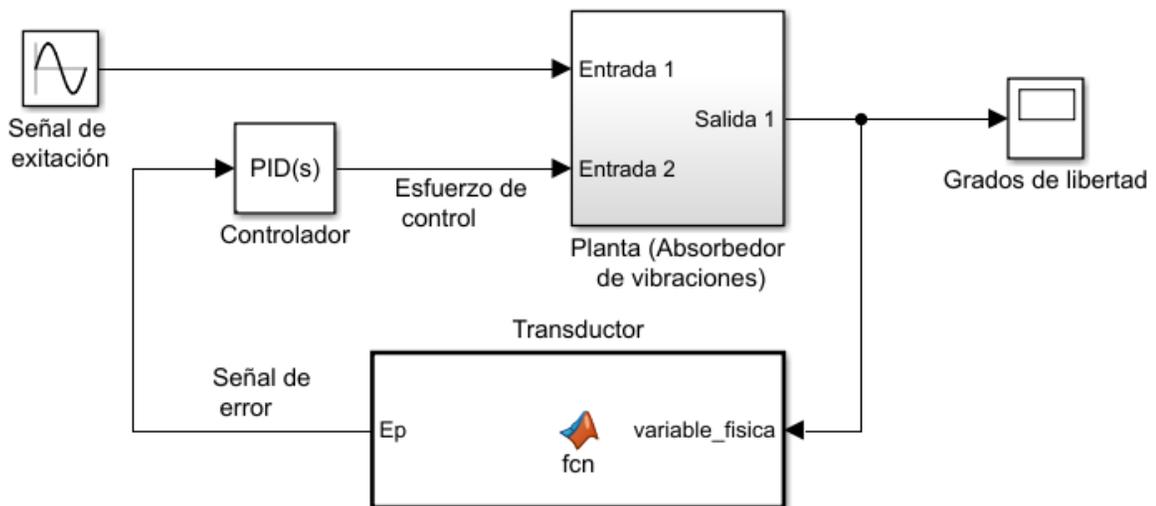


Figura 43 Estructura básica de control 3gdl.

## Planta (absorbedor de vibraciones)

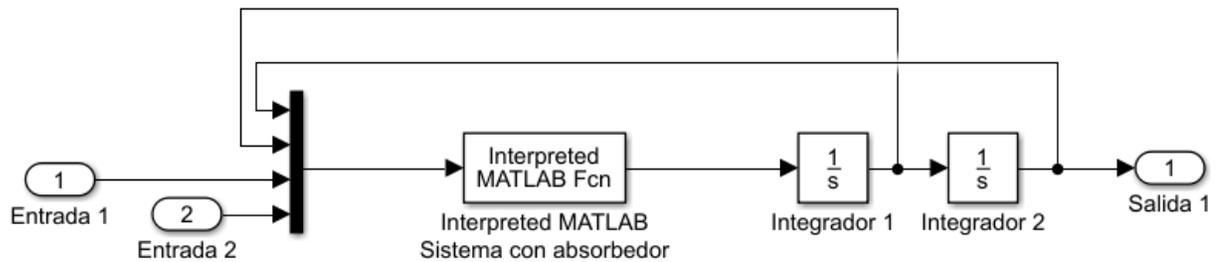


Figura 44 Diagrama del sistema en 3gdl.

La Figura 44 describe la composición básica del sistema, el cual usa las ecuaciones dinámicas (85), (90) y (96) despejando la variable de mayor orden y mediante los integradores que corresponda se obtiene el comportamiento de los grados de libertad respecto al tiempo en la Salida 1, en la Entrada 1 se ingresa la señal de perturbación de tipo senoidal la cual se encarga de excitar al sistema en su frecuencia natural o cercana a ella, en la Entrada 2 se proporciona la fuerza  $\tau(t)$  necesaria para posicionar la masa efectiva del péndulo ( $m_2$ ) en la posición correcta ( $L$ ), la cual define la frecuencia natural del sistema secundario ( $\omega_{abs}$ ).

## Transductor

Para este caso se tomaron las siguientes consideraciones para que la salida del transductor se envíe directamente a la entrada del controlador (ver Anexo B):

- Se consideró la característica del controlador de recibir la señal de una variable de cero o cercana a cero para controlar correctamente la planta, si esta se aleja de cero el controlador modifica la variable para obtener nuevamente una señal de cero.
- En la respuesta de la amplitud resultante del MEM del sistema primario se considera usando pequeñas perturbaciones alrededor de la frecuencia de excitación, y se establece que cuando el valor de  $(\varepsilon\rho)$  tiene valores de cero se obtiene una sintonización exacta y por lo tanto la mínima amplitud de oscilación durante la excitación en el sistema primario, la cual es la condición ideal para el sistema de absorción de vibraciones.

Por lo que en el transductor se calcula el valor de  $(\varepsilon\rho)$  y posteriormente se manda a la entrada del controlador, lo cual permite que este cambie la variable física de tal modo que  $(\varepsilon\rho)$  siempre tenga valores de cero o muy cercanos a cero.

A continuación, se muestra la expresión introducida en el transductor obtenida de la ecuación (75).

$$\varepsilon\rho = \left( \sqrt{\frac{a^2 \varepsilon g^2 \omega_1^4}{16\omega_2^4} - (\varepsilon\zeta_2)^2 + 1} \right) 2\omega_2 - \omega_1 \quad (103)$$

Al aplicar la ecuación directamente puede dar algunos errores, ya que al inicio de la simulación el valor de la amplitud ( $a$ ) empieza en el reposo, lo cual produce que el valor dentro del radical obtenga valores negativos y con ello valores imaginarios, por lo que es necesario aplicar una condición para esa condición como se muestra a continuación:

$$\text{Si } a \leq \sqrt{\frac{16\omega_2^4(\varepsilon\zeta_2)^2}{\varepsilon g^2}} \rightarrow \left[ \frac{a^2 \varepsilon g^2 \omega_1^4}{16\omega_2^4} - (\varepsilon\zeta_2)^2 \right] = 0$$

Lo cual forzará al radical a obtener solo números reales, permitiendo usar la ecuación (103) en el transductor, pero se produce un pequeño error en el inicio de la simulación, el cual puede ser despreciado porque lo que es de interés en este esquema de absorción de vibraciones es la respuesta en estado estable del sistema.

## Controlador

La función del controlador es la de proporcionar un par dinámico  $\tau(t)$  inmerso en la ecuación (96) internamente establecido en la planta, el cual es aplicado a la masa efectiva del péndulo ( $m_2$ ) de tal modo que se mantenga una posición correcta ( $L$ ), la cual define la frecuencia natural del sistema secundario ( $\omega_{abs}$ ) y se asegura la sintonización interna exacta en el sistema (ver Anexo B).

### 5.5.1 Aplicación del control semi-activo de 3gdl

Siguiendo con la metodología del capítulo 5.4.1, utilizando el método de Ziegler-Nichols para obtener las ganancias necesarias para el funcionamiento del control y para la simulación se

proporcionaron cambios en la frecuencia como se muestra en la Tabla 8 permitiendo observar el comportamiento del sistema ante cambios repentinos.

Tabla 8 Cambios en la frecuencia de simulación.

$0 \leq t < 80 \text{ seg}$	$\Omega = \omega_n = 2\omega_{abs} = 8.628 \text{ rad/s}$
$80 \leq t < 160 \text{ seg}$	$\Omega = 8.253 \text{ rad/s}$
$160 \leq t < 240 \text{ seg}$	$\Omega = 8.846 \text{ rad/s}$

Como se puede observar en la Figura 45, la respuesta del control en el sistema de 3gdl comparado con la respuesta obtenida en el capítulo 5.4.1 es básicamente la misma sin un cambio significativo, por lo que podemos decir que ambos controles atenúan igual de bien la respuesta del sistema primario.

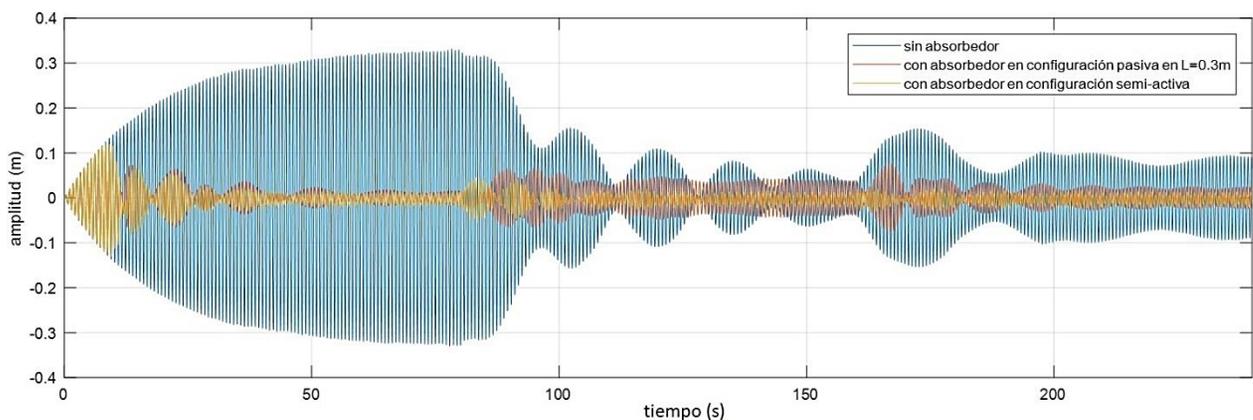


Figura 45 Comparación del comportamiento del sistema primario ante cambio frecuencial en diversas condiciones.

Si se observa la respuesta del sistema secundario con control en el sistema de 3gdl y se compara con la respuesta de control del sistema de 2gdl, se puede observar un aumento del 20% en la amplitud de la respuesta, que como se observó en la Figura 45, este aumento de la amplitud no repercute en la respuesta del sistema primario.

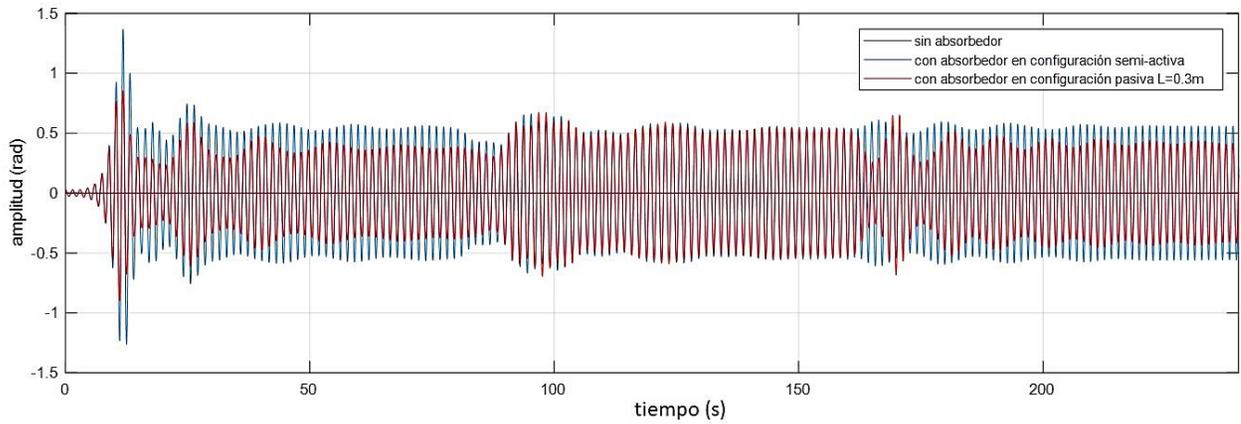


Figura 46 Comparación del comportamiento del sistema secundario ante cambio frecuencial en diversas condiciones.

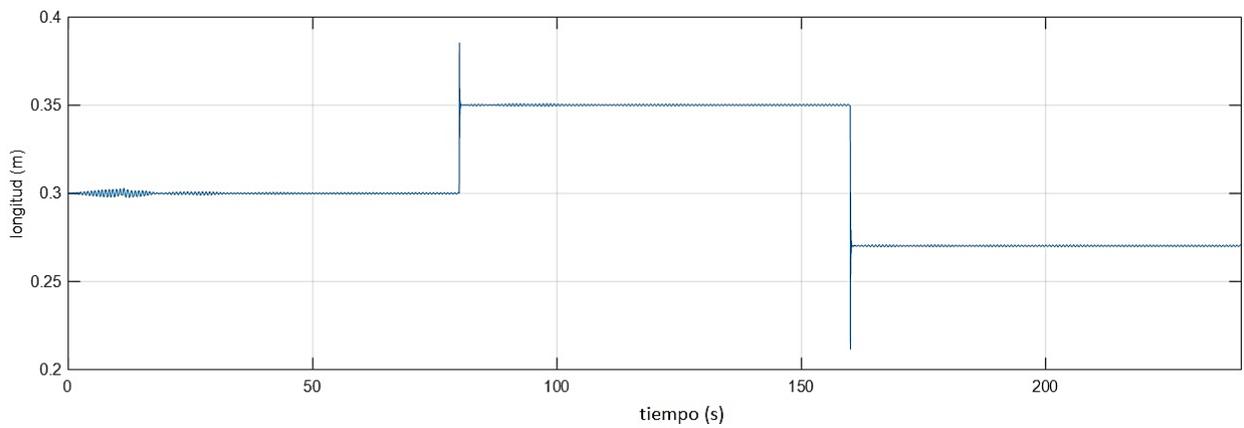


Figura 47 Valor de  $L$  resultante.

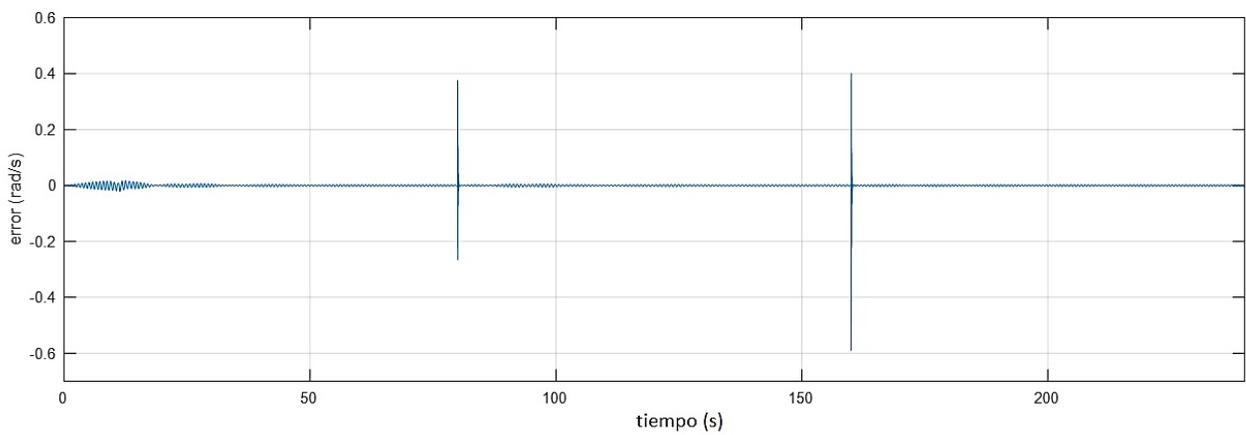
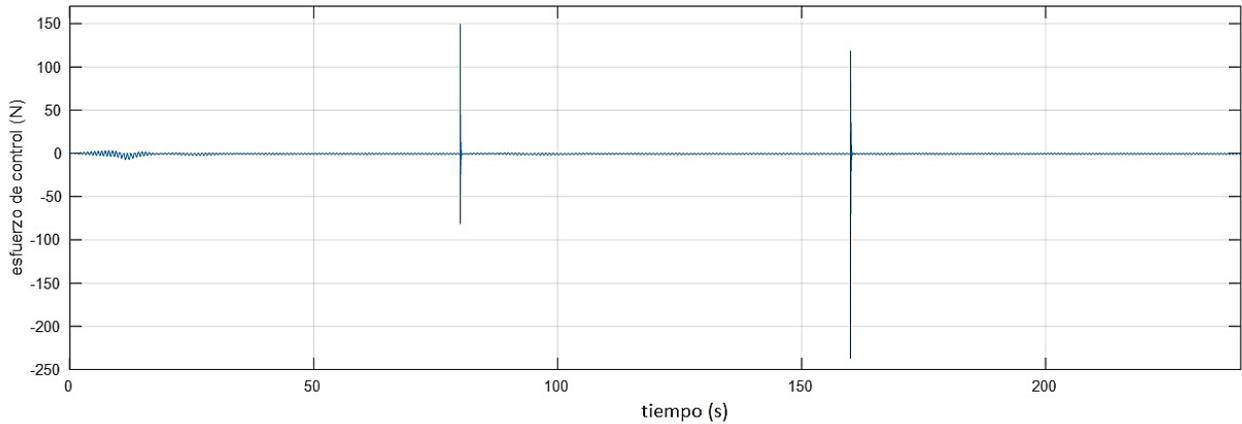


Figura 48 Señal error.

Mediante la interpretación de la Figura 48 y la Figura 49 se concluye que el control de 3gdl es capaz de mover la masa efectiva del péndulo  $m_2$  en la posición adecuada ( $L$ ) según la frecuencia

de excitación aplicada al sistema, y esto trabaja correctamente con un bajo nivel de error excepto en los puntos de cambio de frecuencia repentinos.



*Figura 49 Esfuerzo de control usando control PID.*

La señal que el control genera se envía en el accionamiento del servomotor encargado de posicionar la masa efectiva del péndulo  $m_2$ , este traducido en unidades de par (Nm), pero gracias al bajo nivel de error, esto permite al servomotor únicamente trabajar en los momentos requeridos como el caso de los cambios en la frecuencia de excitación.

### 6. Conclusiones

En este trabajo de tesis se desarrolla el análisis, diseño y construcción de un absorbedor de vibraciones semi-activo no lineal tipo pendular para la atenuación de las oscilaciones resonantes de una estructura tipo edificio discretizada en 1 grado de libertad.

Con la implementación del absorbedor autoparamétrico tipo pendular y un correcto uso de sus características físicas, fue posible replicar el comportamiento físico del sistema a través de simulaciones numéricas, las cuales mediante la obtención de sus graficas (en el dominio temporal y frecuencial) podemos observar que el absorbedor no lineal cumple su objetivo de mitigar la oscilación de la estructura tipo edificio a la que se encuentra acoplada, esto con un muy buen resultado de absorción de la vibración de hasta un 95%, lo cual conlleva a resultados satisfactorios, el único problema que muestra sería el tiempo de sintonización necesario para que ocurra una correcta disminución en la vibración, por lo que se concluye que este tipo absorbedores son útiles solo en el uso de sistemas con vibración armónica con amplitud y frecuencia constantes.

Por otro lado, en relación con el control semi-activo de posición implementado sobre la masa del péndulo ( $m_2$ ), se puede concluir que este esquema de absorción permite que el sistema. adquiera robustez ante el cambio en la frecuencia de excitación, lo que trae como consecuencia que el sistema secundario permita la absorción de vibraciones sobre la estructura tipo edificio en un rango más amplio de frecuencias.

Como trabajo futuro, que podría contribuir a mejorar los resultados hasta ahora mostrados, se considera lo siguiente:

1. Validar los resultados hasta ahora mostrados, excitando el sistema mediante el uso de un hexápodo con los parámetros utilizados en las simulaciones numéricas.
2. Aplicar el control PID en el sistema, como también determinar los parámetros adecuados para el control semi-activo.
3. Explorar el comportamiento del absorbedor ante diferentes configuraciones y hacer uso de sistemas de control alternativos, permitiendo obtener resultados diversos y llevar a cabo una comparación del desempeño dinámico entre las leyes de control implementadas.

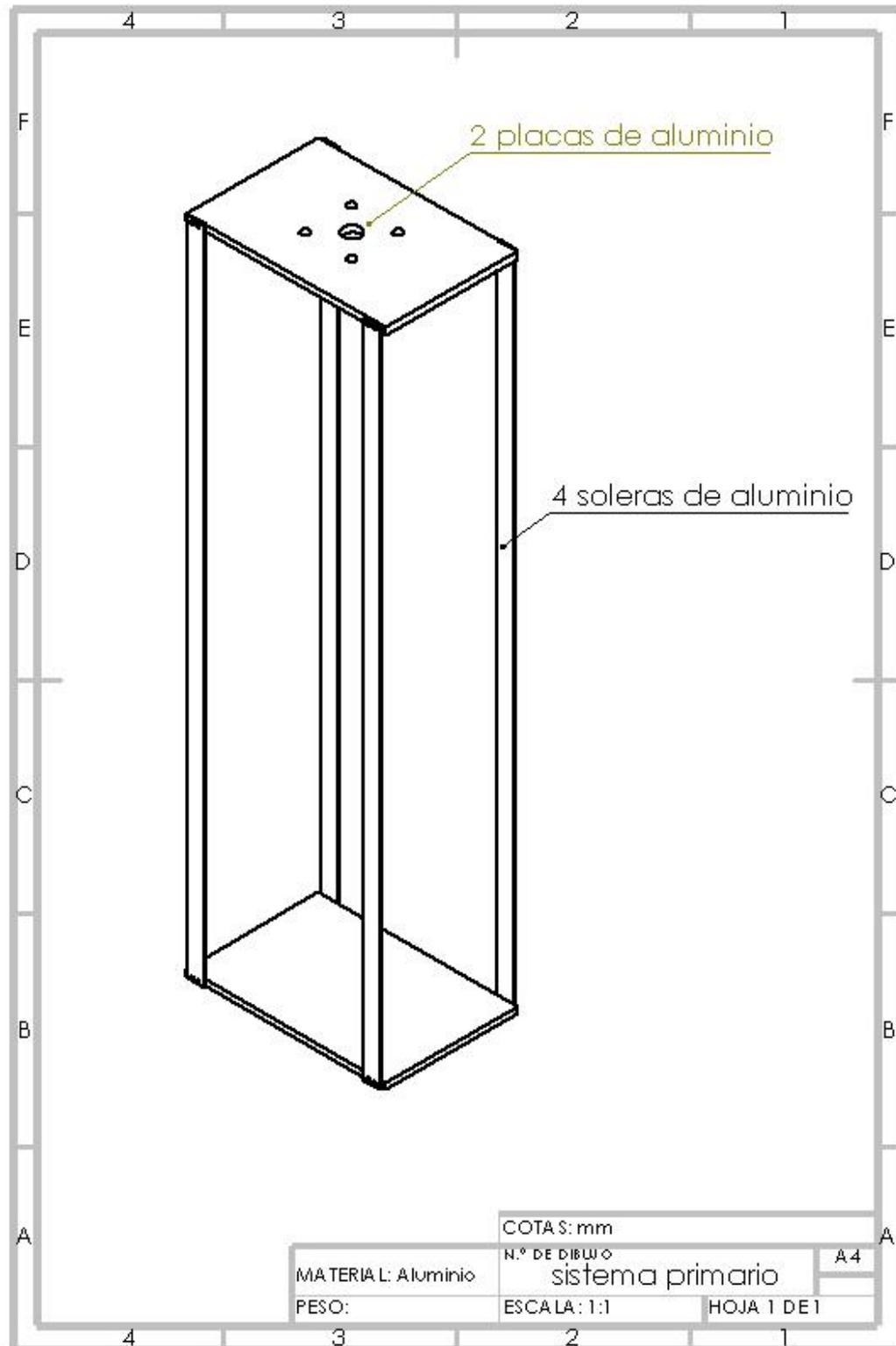
## Referencias

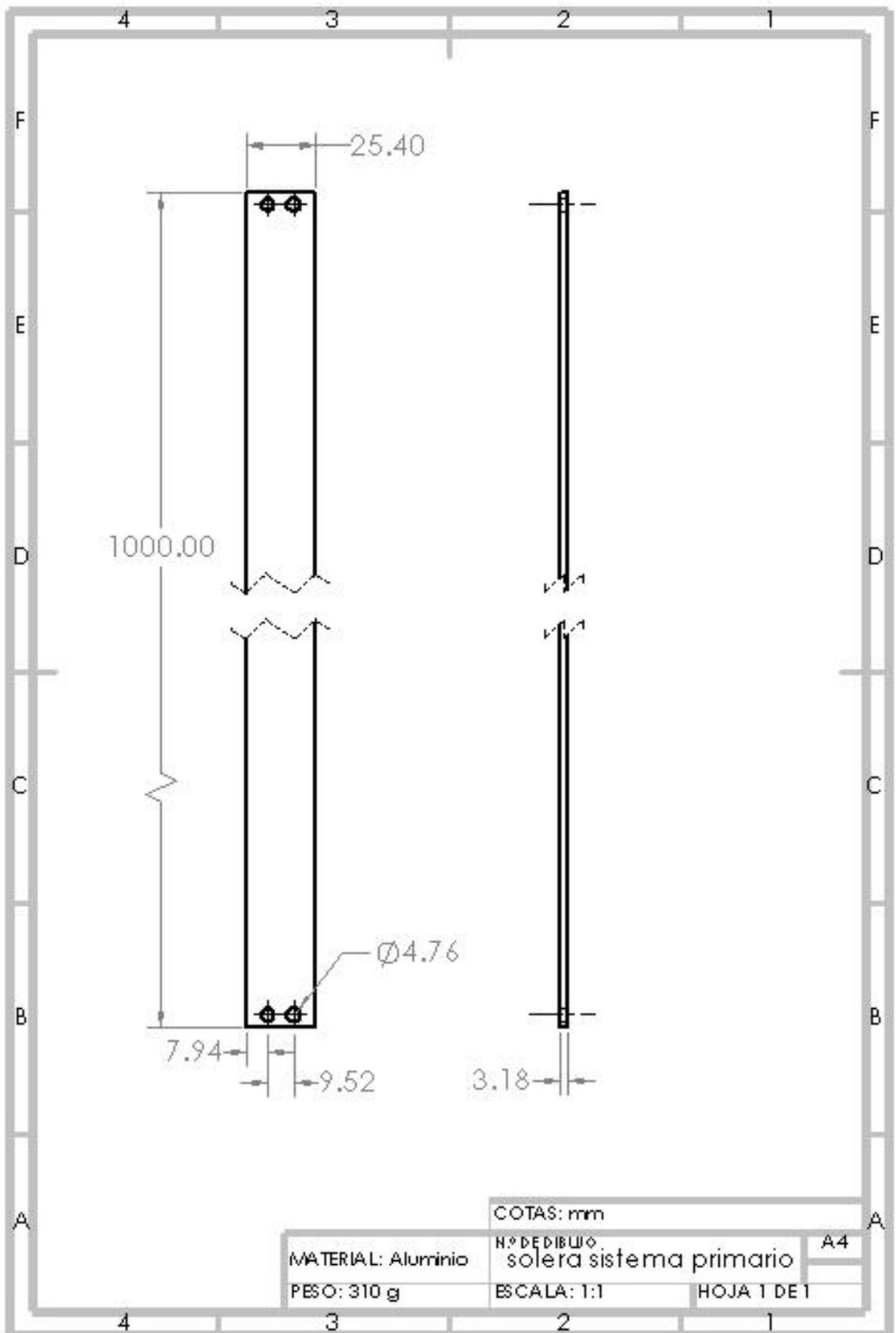
- [1] R. S. Haxton y A. D. Barr, «The autoparametric vibration absorber,» *J. MANUF. SCI. ENG.*, pp. 119-125, 1972.
- [2] M. R. Gutierrez y G. S. Navarro, «Control activo de vibraciones en estructuras tipo edificio usando actuadores piezoeléctricos y retroalimentación positiva de la aceleración,» *DYNA*, pp. 116-125, 2013.
- [3] D. A. Flores Sanchez, H. F. Abundis Fong y L. A. Zamora Campos, «Diseño de un absorbente pendular para una estructura tipo edificio,» *Revista del diseño innovador*, vol. 1, nº 1, pp. 10-20, 2017.
- [4] H. F. Abundis Fong, J. Enrique Zárate, A. Cabrera Amado y G. Silva Navarro, «Optimum design of a nonlinear vibration absorber coupled to a resonant oscillator: a case study,» *SHOCK VIB*, pp. 1-11, 2018.
- [5] A. Vyas y A. K. Bajaj, «Dynamics of autoparametric vibration absorber using multiple,» *J SOUND VIB*, pp. 115-135, 2001.
- [6] H. Jo y H. Yabuno, «Amplitude reduction of parametric resonance by dynamic vibration,» *J SOUND VIB*, pp. 2205-2217, 2010.
- [7] S. Wu, Y. Chen y S. Wang, «Two-degree-of-freedom rotational-pendulum vibration absorber,» *J SOUND VIB*, pp. 1052-1064, 2010.
- [8] K. Majcher y Z. Wójcicki, «Kinematically excited parametric vibration of a tall building model with a TMD – part 1: numerical analyses,» *ARCH CIV MECH ENG*, pp. 204-217, 2013.
- [9] J. E. Zárate y G. S. Navarro, «Control activo de vibraciones en estructuras tipo edificio sometidas a sismos utilizando múltiple retroalimentación positiva de la posición y modos deslizantes,» *DYNA*, pp. 83-91, 2014.
- [10] K. Krzysztof, «Simultaneous vibration mitigation and energy harvesting from a pendulum-type absorber,» *COMMUN NONLINEAR SCI*, 2020.
- [11] D. Poon, S. S. Shieh, L. Joseph y C. C. Chang, «Structural design of Taipei 101, the World's tallest building,» *CTBUH*, 2004.
- [12] G. White, Introducción al análisis de vibraciones, Azima DLI.
- [13] S. S. Rao, Vibraciones mecánicas, México: Pearson, 2012.
- [14] J. P. Den Hartog, Mecánica de las vibraciones, México: Compañía editorial continental, 1976.
- [15] J. He y Z.-F. Fu, Modal Analysis, Gran Bretaña: Oxford: Butterworth Heinemann, 2001.
- [16] C. W. de Silva, Vibration: fundamentals and practice, New York: CRC Press, 2000.
- [17] I. Ramírez y L. Palacios, Calculo de varias variables, México: Grupo Editorial Patria, 2017.
- [18] A. Tondl, Autoparametric Resonance in Mechanical Systems, Cambridge University Press, 2000.
- [19] B. C. Kuo, Sistemas de control automático, México: Prentice Hall Hispanoamericana, 1996.
- [20] J. Juel Thomsen, Vibrations and stability, New York: Springer, 2003.
- [21] G. Silva Navarro, H. F. Abundis-Fong y B. Vazquez Gonzalez, «Application of a passive/active autoparametric cantilever beam absorber with PZT actuator for Duffing systems,» *Active and Passive Smart Structures and Integrated Systems*, p. 868820, 2013.

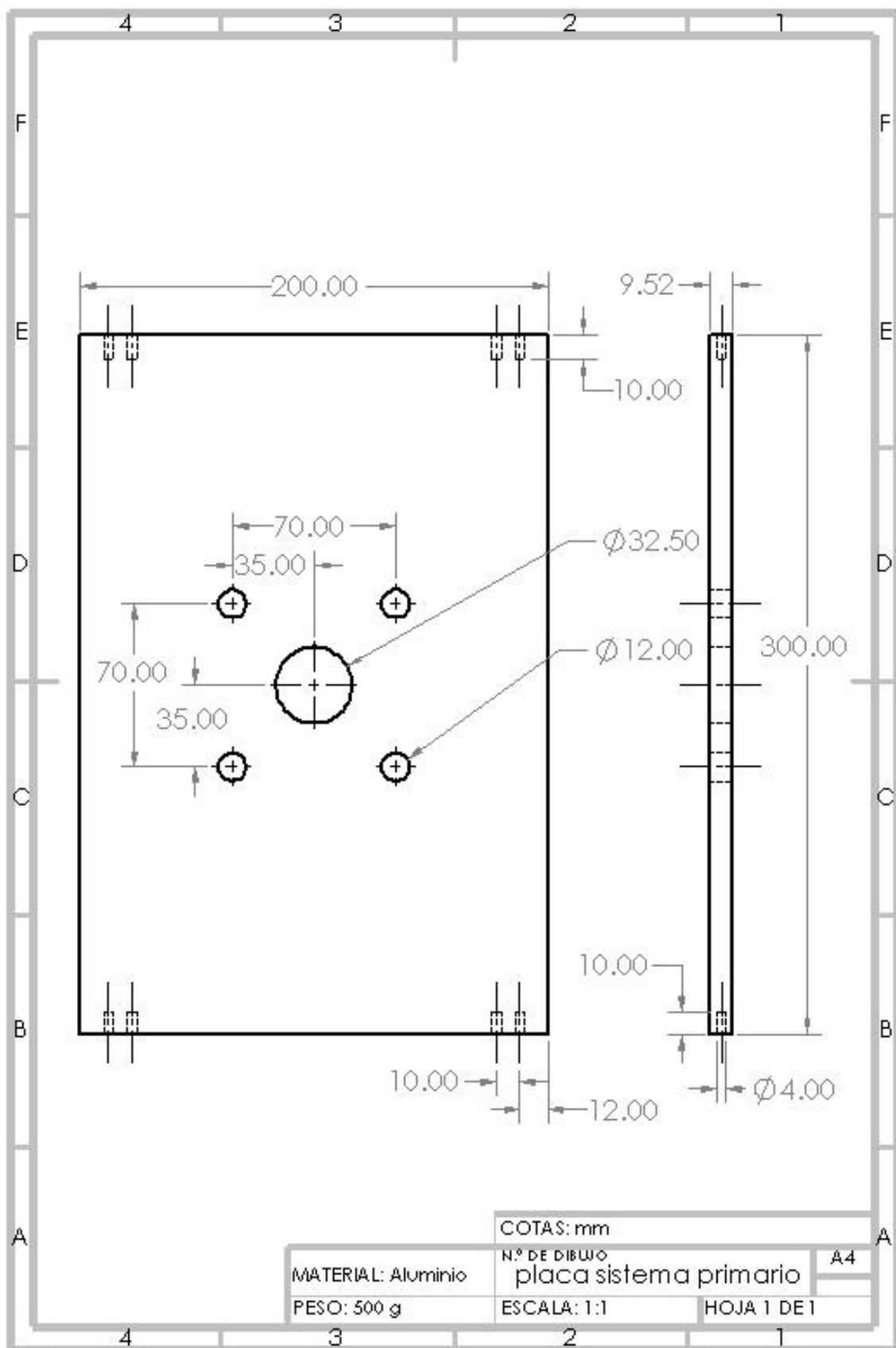
- [22] G. Silva Navarro y H. F. Abundis Fong, «Passive/active autoparametric cantiliver beam absorber with piezoelectric actuator for a two-story building-like structure,» *Journal of Vibration an Acoustic*, vol. 137, p. 011012, 2015.
- [23] O. Katsuhiko, *Ingenieria de control moderna*, Madrid, España: Pearson Educación, 2010.

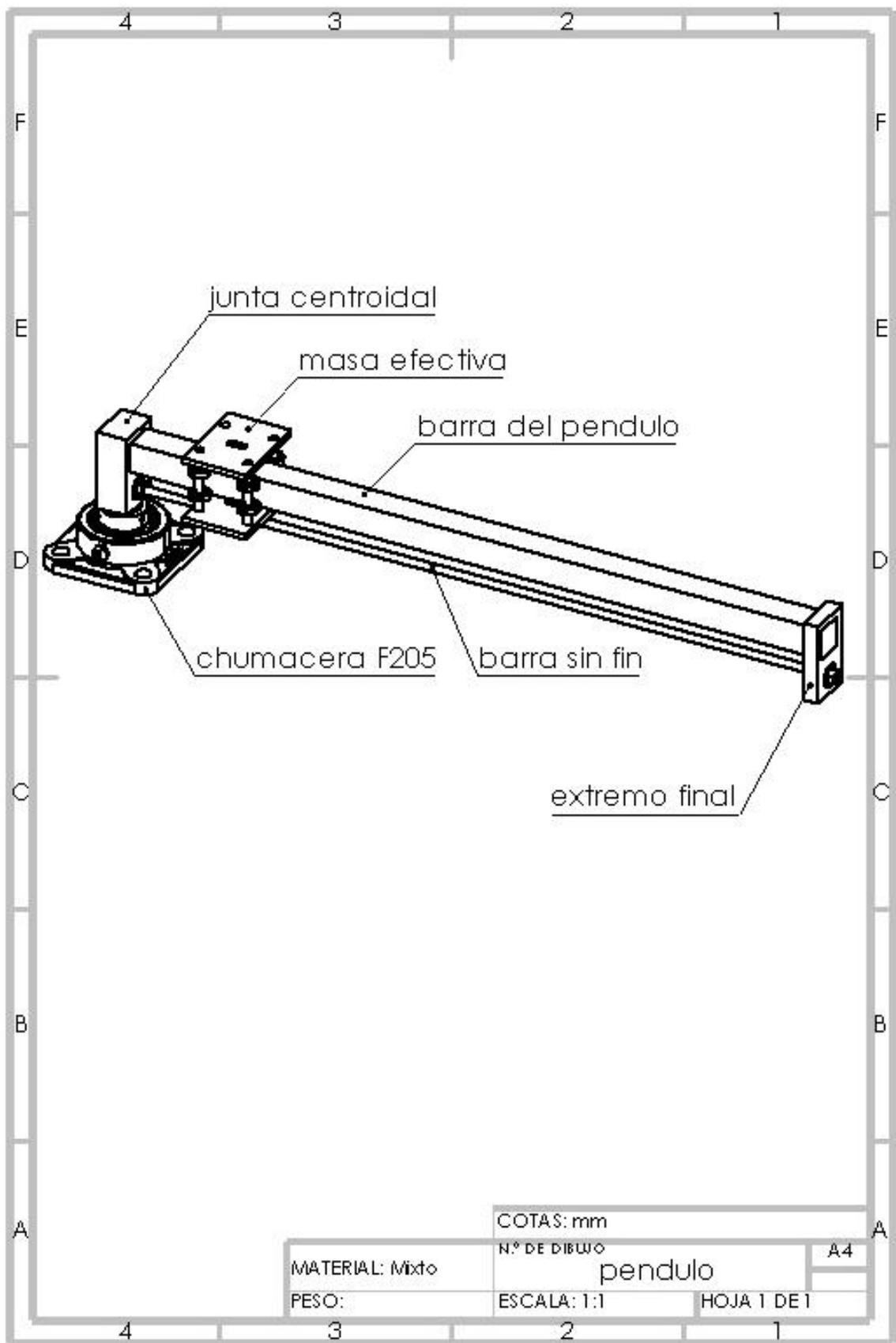
## Anexo A

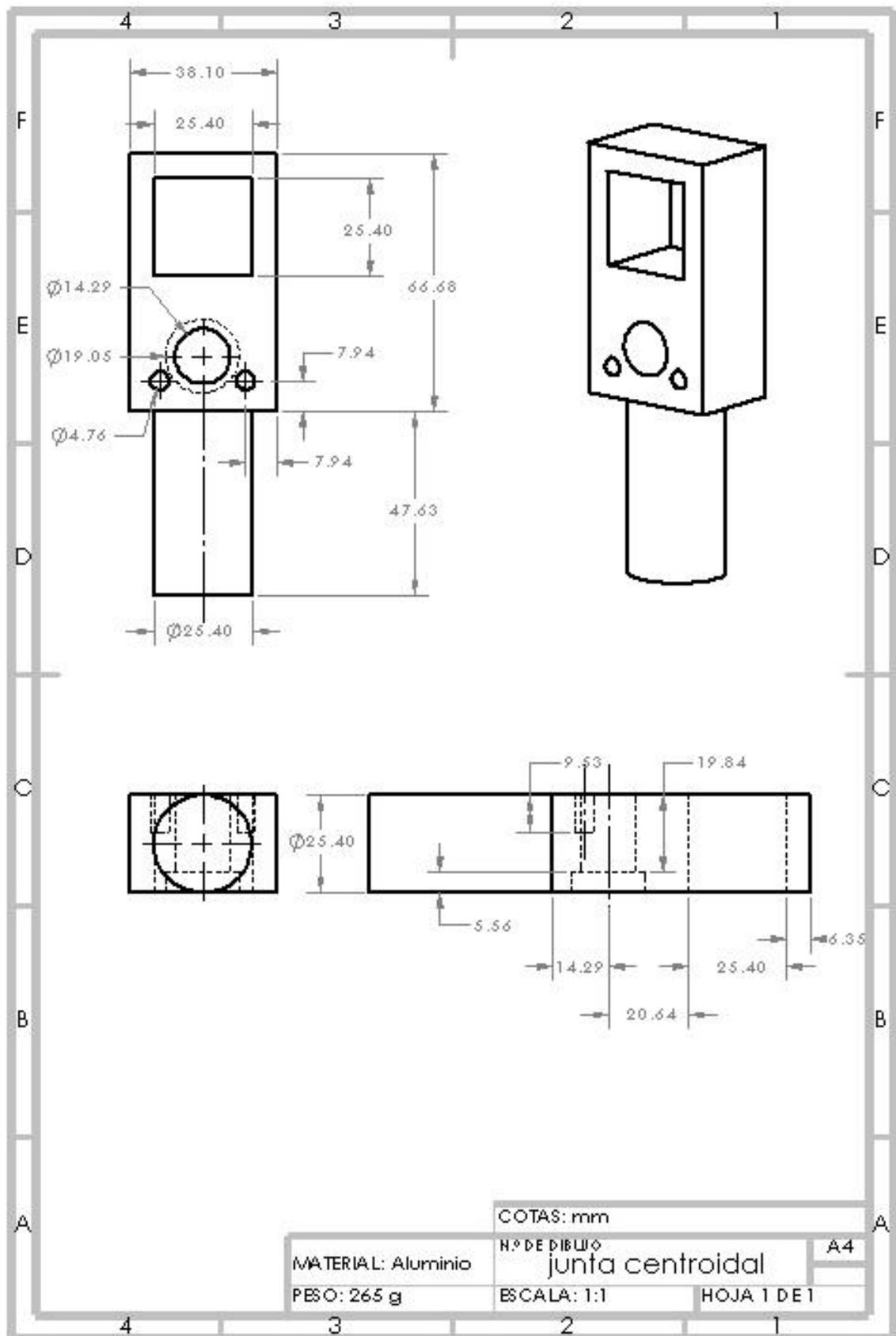
### Planos de la plataforma experimental en SolidWorks

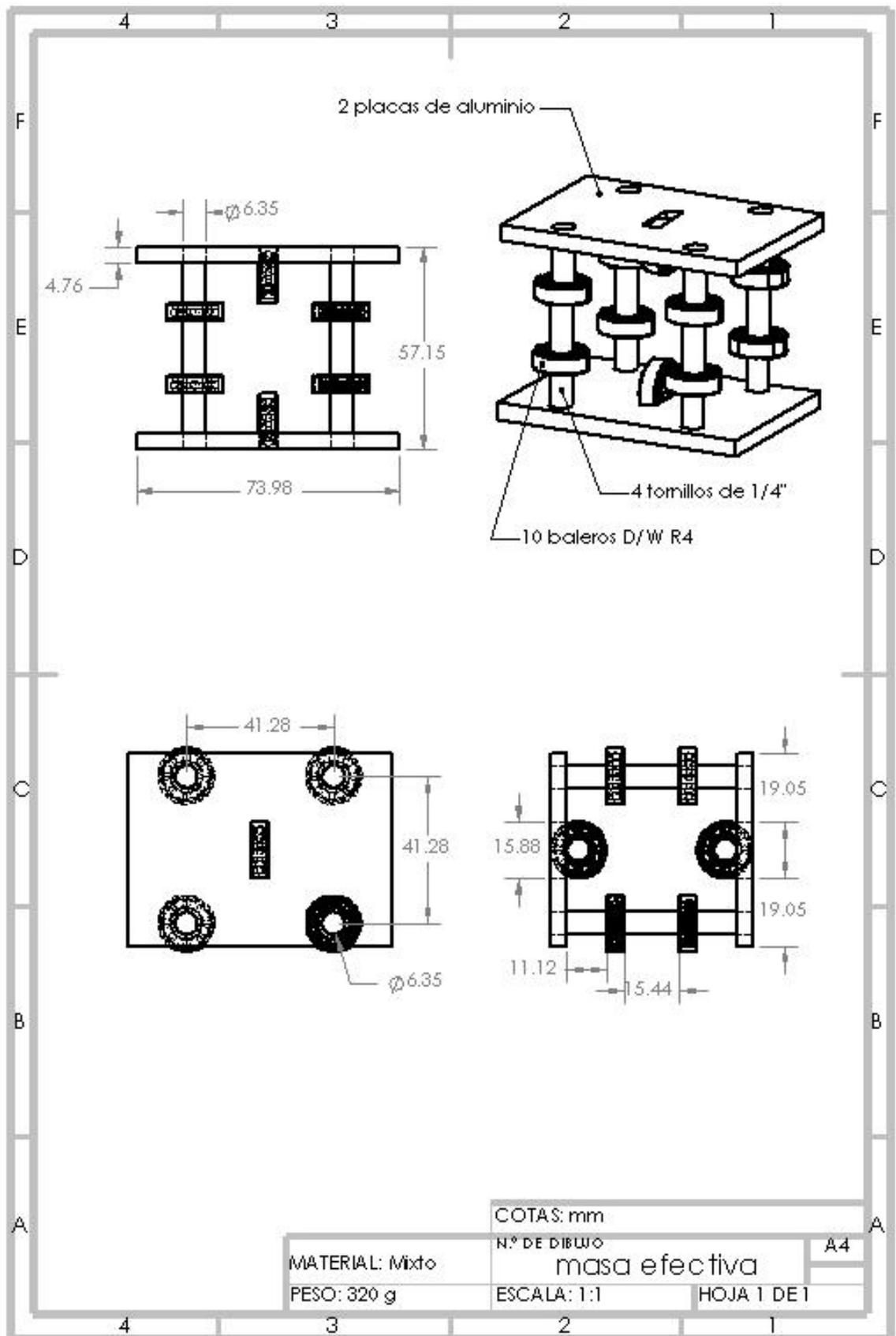


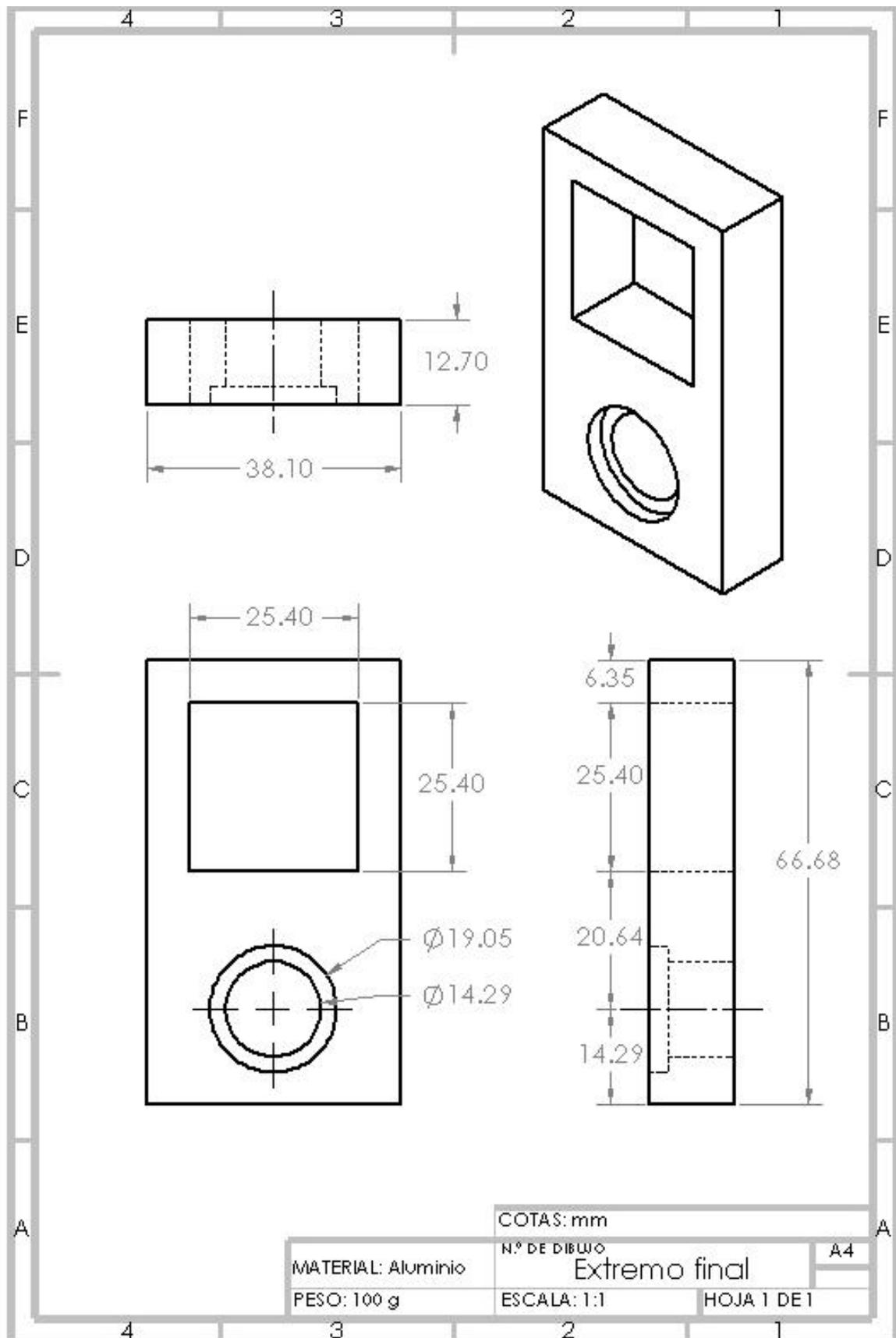


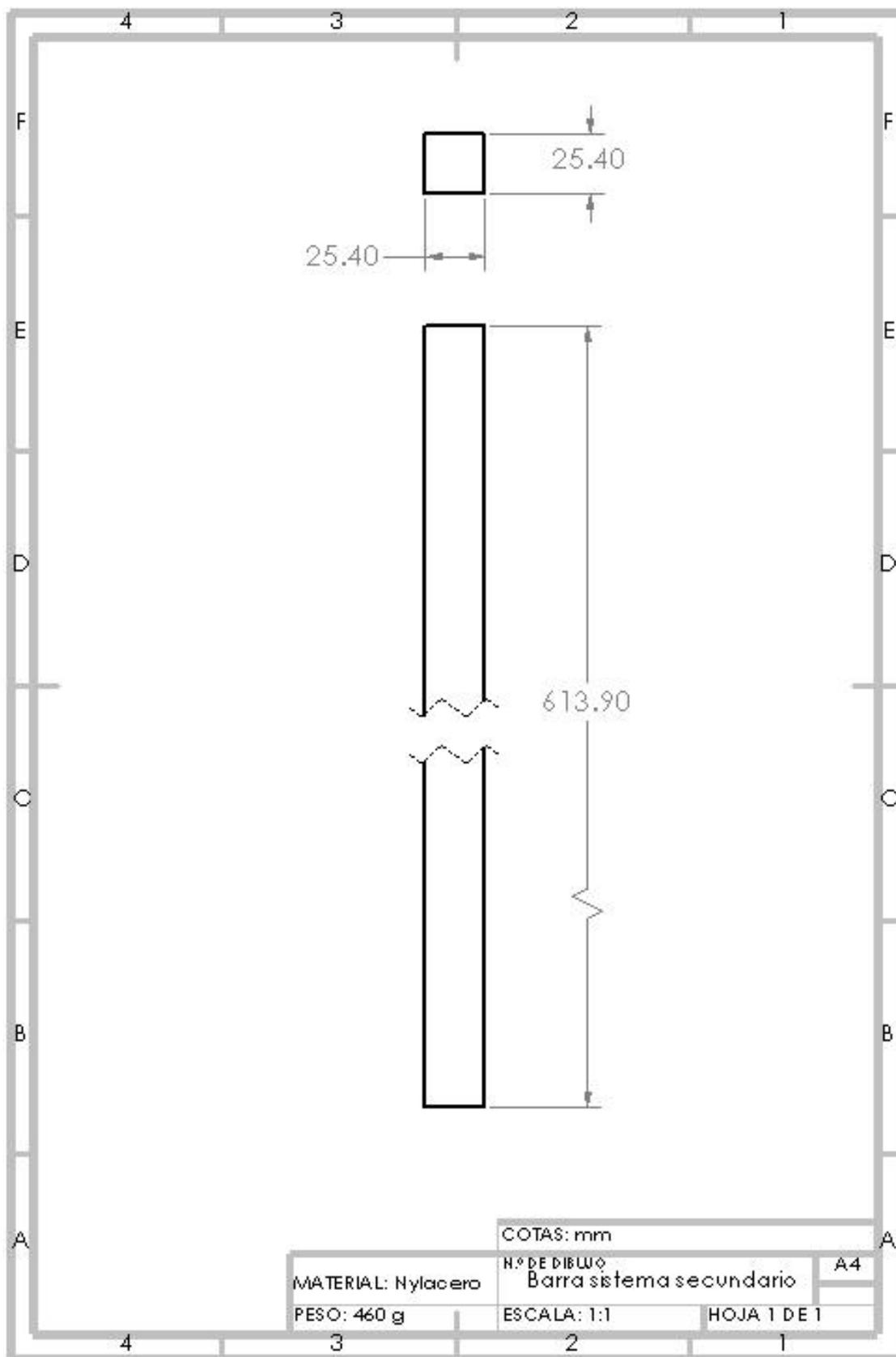


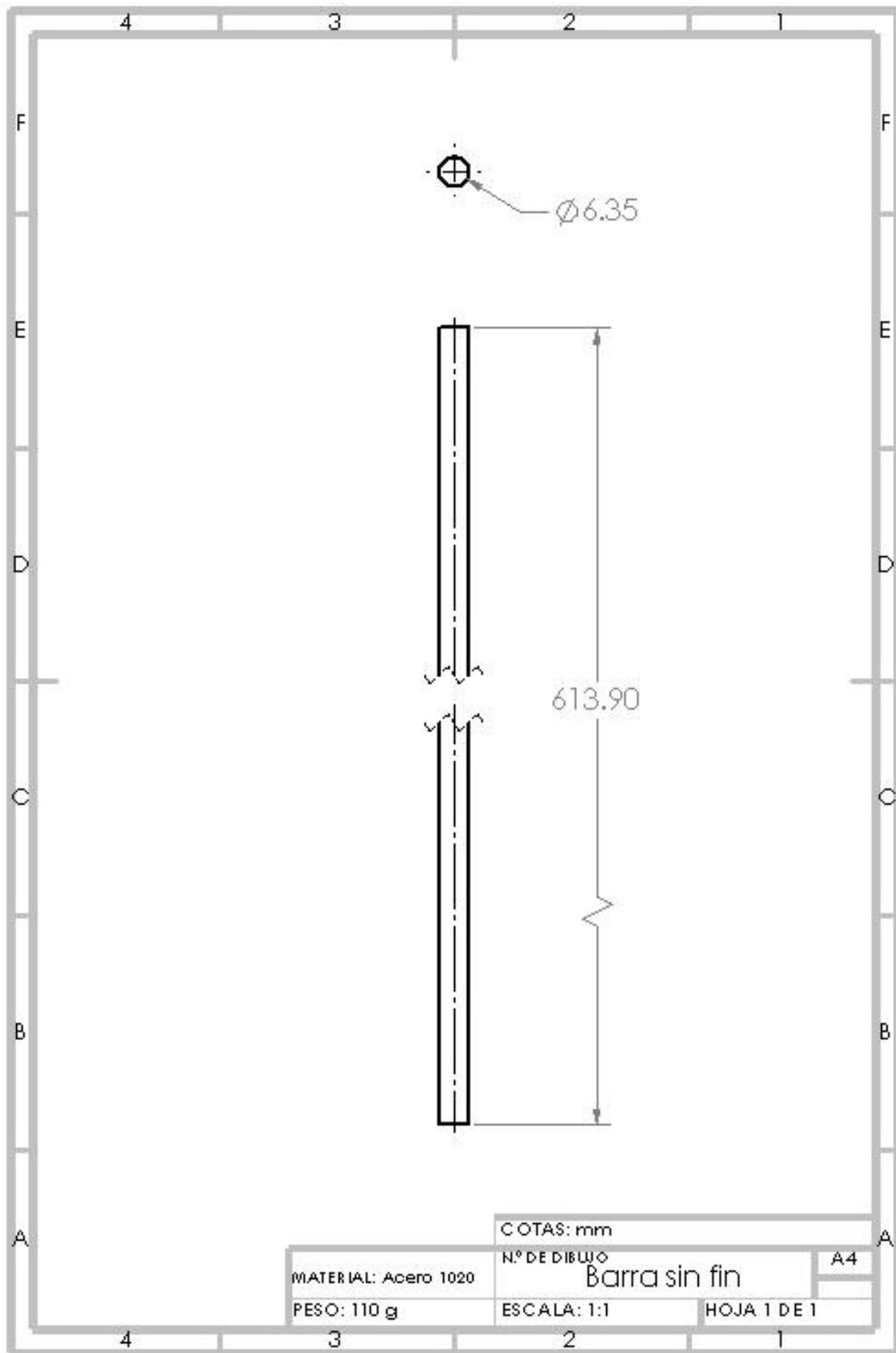












## Anexo B

Programas en Matlab-Simulink para obtener la respuesta temporal de los modelos dinámicos utilizados.

- Programa utilizado para interpretar la dinámica del sistema con absorbedor con control semi-activo de 2gdl

```
function Qpp=dinámica_2gdl(u)
```

```
%Parámetros
```

```
m1=1.7584;  
m2=0.3774;  
mi=0.265;  
mf=0.1;  
c1=0.424;  
k1=228.7017;  
c2=0.04;  
lb=0.61391;  
ms=0.18*lb;  
mb=0.75*lb;  
k2=4.9195;
```

```
%Entradas
```

```
q1=u(1); %primer grado de libertad  
q2=u(2); %segundo grado de libertad  
q1p=u(3); %derivada primer grado de libertad  
q2p=u(4); %derivada segundo grado de libertad  
a=u(5); %fuerza externa  
L=u(6); %valor de posicion de m2 (masa del pendulo)  
TAU(1,1)=a;  
TAU(2,1)=0;  
Qp=[q1p;q2p]; %vector de velocidades
```

```
%Matrices
```

```
M(1,1)=m1+m2+mi+mb+ms+mf;  
M(1,2)=-(m2*L+0.1*lb+0.465*lb^2)*sin(q2);  
M(2,1)=-(m2*L+0.1*lb+0.465*lb^2)*sin(q2);  
M(2,2)=7.24593e-4*m2+2*m2*L^2+0.5425*lb^3+0.190475*lb^2-2.12471e-3*lb+8.86072e-5;  
  
c(1,1)=c1;  
c(1,2)=-(m2*L+0.5*mb*lb+0.5*ms*lb+mf*lb)*q2p*cos(q2);  
c(2,1)=0;  
c(2,2)=c2;
```

```
G(1,1)=k1*q1;
```

$$G(2,1)=k2*q2;$$

**% Vector de aceleraciones**

$$Qpp=M\backslash(TAU-c*Qp-G);$$

**function** [excitacion,L] = fcn(t)

**% Parametros**

$$m1=1.7584;$$

$$m2=0.3774;$$

$$mi=0.265;$$

$$mf=0.1;$$

$$k1=228.7017;$$

$$lb=0.61391;$$

$$ms=0.18*lb;$$

$$mb=0.75*lb;$$

$$k2=4.9195;$$

$$w\_n=(k1/(m1+m2+mi+mb+ms+mf))^.5;$$

$$w2=8.253;$$

$$w3=8.846;$$

- Cálculo de L a partir de las condiciones de sintonización

**% Calculo del valor de L utilizando las condiciones de sintonizacion**

**% donde  $w\_n=2*w\_abs$  y obtencion de la señal de perturbacion del sistema**

**if** (t<80)

$$excitacion=\sin(w\_n*t);$$

$$L=\sqrt{((4*k2/w\_n^2)-7.24593e-4*m2-0.5425*lb^3-0.190475*lb^2+2.12471e-3*lb-8.86072e-5)/(2*m2)};$$

**elseif** (t>=80)&&(t<160)

$$excitacion=\sin(w2*t);$$

$$L=\sqrt{((4*k2/w2^2)-7.24593e-4*m2-0.5425*lb^3-0.190475*lb^2+2.12471e-3*lb-8.86072e-5)/(2*m2)};$$

**else**

$$excitacion=\sin(w3*t);$$

$$L=\sqrt{((4*k2/w3^2)-7.24593e-4*m2-0.5425*lb^3-0.190475*lb^2+2.12471e-3*lb-8.86072e-5)/(2*m2)};$$

**end**

- Cálculo de L real a partir de la ecuación dinámica

**function** L = fcn(q1,q2,q1p,q2p,q1pp,q2pp,F)

**% Parametros**

$$m1=1.7584;$$

$$m2=0.3774;$$

$$mi=0.265;$$

```
mf=0.1;  
c1=0.424;  
k1=228.7017;  
lb=0.61391;  
ms=0.18*lb;  
mb=0.75*lb;  
meq=m1+m2+mi+mb+ms+mf;
```

```
%Calculo del valor de L utilizando la ecuacion dinamica que describe la  
%dinamica del primer grado de libertad
```

```
B=F-c1*q1p-k1*q1-meq*q1pp;  
A=-q2p^2*cos(q2)-q2pp*sin(q2);  
C=0.465*lb^2+0.1*lb;  
L=B/(A*m2)-C/m2;
```

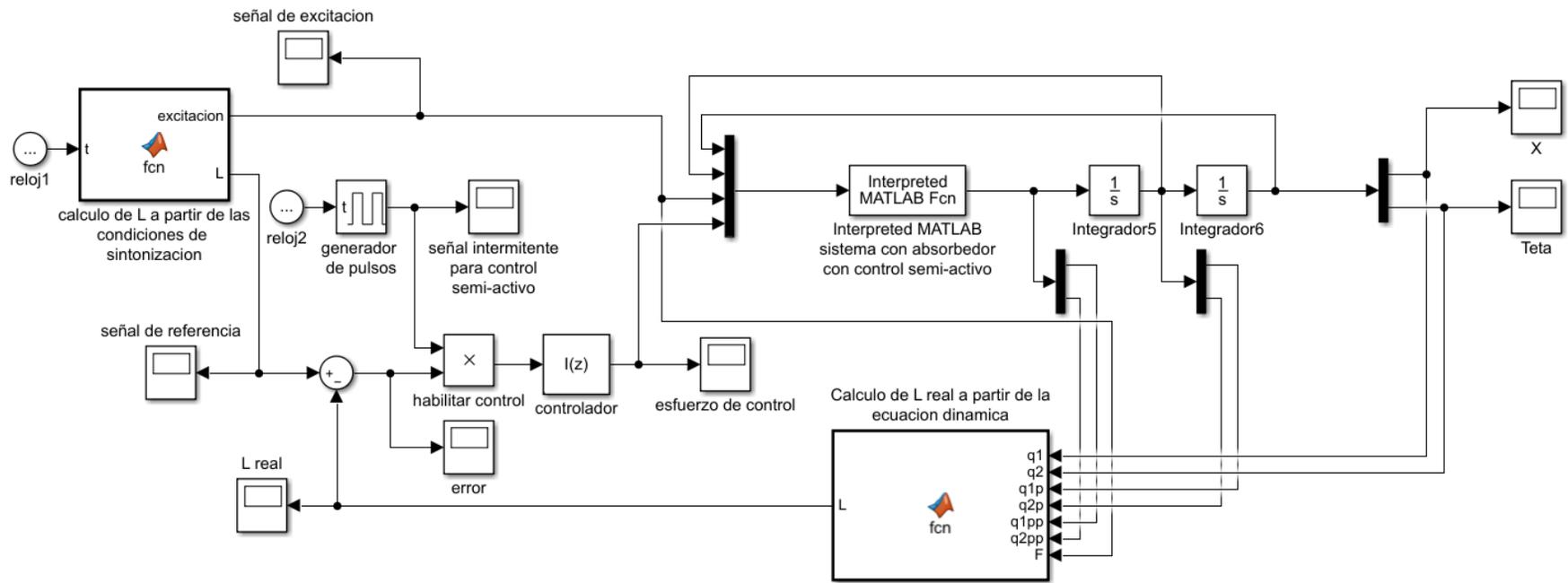


Figura 50 Representación del modelo dinámico a simular de 2gdl.

- Programa utilizado para interpretar la dinámica del sistema con absorbedor con control semi-activo de 3gdl basado

```
function Qpp=dinamica_3gdl(u)

%Parámetros
m1=1.7584;
m2=0.3774;
mi=0.265;
mf=0.1;
c1=0.424;
k1=228.7017;
k2=4.91;
c2=0.04;
c3=50;
lb=0.61391;
ms=0.18*lb;
mb=0.75*lb;

%Entradas
q1=u(1); %primer grado de libertad
q2=u(2); %segundo grado de libertad
q3=u(3); %tercer grado de libertad
q1p=u(4); %derivada primer grado de libertad
q2p=u(5); %derivada segundo grado de libertad
q3p=u(6); %derivada tercer grado de libertad
a=u(7); %fuerza externa
b=u(8);
TAU(1,1)=a;
TAU(2,1)=0;
TAU(3,1)=b;

%Matrices
M(1,1)=m1+m2+mi+mb+ms+mf;
M(1,2)=- (m2*q3+0.1*lb+0.465*lb^2) *sin(q2);
M(1,3)=m2*cos(q2);
M(2,1)=- (m2*q3+0.1*lb+0.465*lb^2) *sin(q2);
M(2,2)=7.24593e-4*m2+2*m2*q3^2+0.5425*lb^3+0.190475*lb^2-
2.12471e-3*lb+8.86072e-5;
M(2,3)=0;
M(3,1)=m2*cos(q2);
M(3,2)=0;
M(3,3)=m2;

c(1,1)=c1*q1p-2*m2*q2p*q3p*sin(q2) -
(m2*q3+0.465*lb^2+0.1*lb) *q2p*cos(q2);
```

```
c(2,1)=c2*q2p+4*m2*q3*q2p*q3p;
c(3,1)=-2*m2*q3*q2p^2;
```

```
G(1,1)=k1*q1;
G(2,1)=k2*q2;
G(3,1)=0;
```

```
%Vector de aceleraciones
```

```
Qpp=M\ (TAU-c-G) ;
```

- Cálculo de  $\epsilon\rho$  usando la ecuación de amplitud en estado frecuencial del sistema primario mediante el MEM

```
function ep = fcn(w1,x,L)
```

```
%Parametros
```

```
m2=0.3774;
k2=4.9195;
lb=0.61391;
c2=0.04;
```

```
a=x;
```

```
Jt=(m2*(7.24593e-4+2*L^2)+0.5425*lb^3+0.190475*lb^2-2.12471e-3*lb+8.86072e-5);
```

```
w2=sqrt(k2/Jt);
```

```
ez2=c2/(2*w2*Jt);
```

```
eg=Jt^-1*(m2*L+0.1*lb+0.465*lb^2);
```

```
A=((a^2*eg^2*w1^4)/(16*w2^4))-ez2^2;
```

```
if a<=sqrt((16*w2^4*ez2^2)/eg^2)
```

```
    A=0;
```

```
else
```

```
    A=((a^2*eg^2*w1^4)/(16*w2^4))-ez2^2;
```

```
end
```

```
ep=(sqrt(A)+1)*2*w2-w1;
```

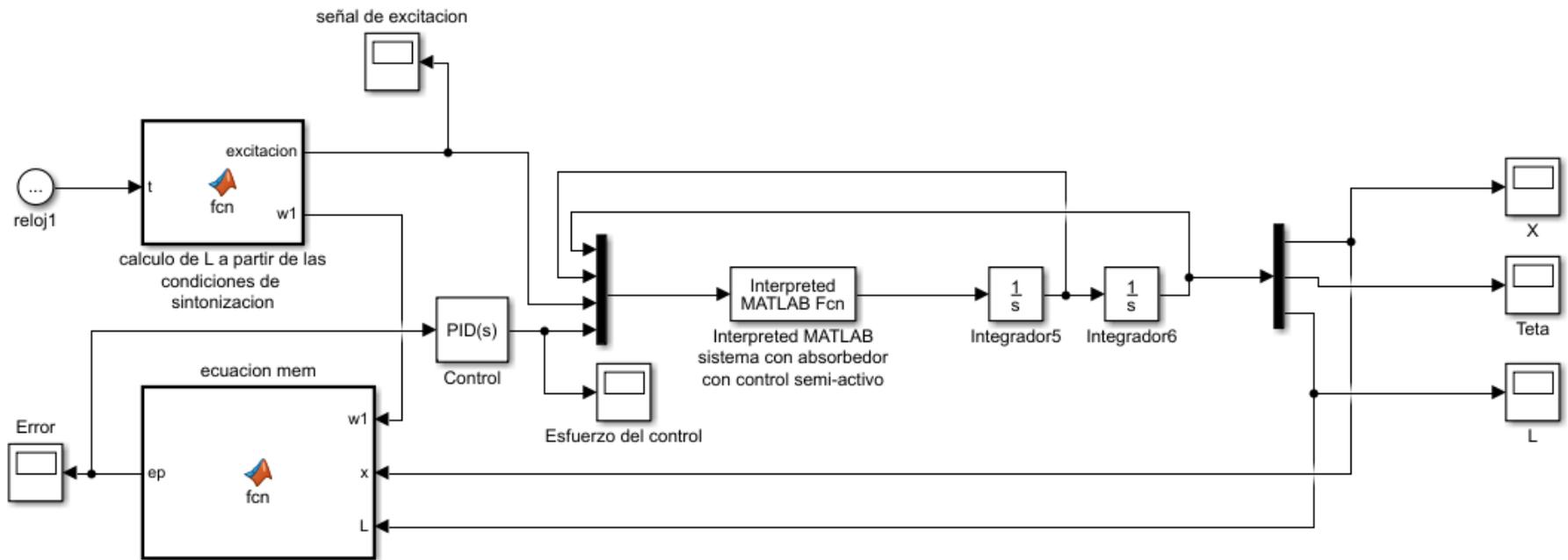


Figura 51 Representación del modelo dinámico a simular en 3gdl.