



**EDUCACIÓN**  
SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA



TECNOLÓGICO  
NACIONAL DE MÉXICO

Instituto Tecnológico de Pachuca

INSTITUTO TECNOLÓGICO DE PACHUCA  
DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO E INVESTIGACIÓN

“MODELO DE ORDEN FRACCIONAL PARA DESCRIBIR LA  
RESPUESTA VISCOELÁSTICA DE MATERIALES COMPUESTOS”

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:  
MAESTRO EN INGENIERÍA MECÁNICA

PRESENTA:

ING. ESAÚ MOISÉS RODRÍGUEZ VIGUERAS.

DIRECTOR:

DR. LUIS MANUEL PALACIOS PINEDA

REVISORES:

DR. IGNACIO RAMÍREZ VARGAS

DR. ERIKA OSIRIS ÁVILA DÁVILA

*Pachuca de Soto, Hidalgo 18 de septiembre del 2021*



Carretera México-Pachuca Km. 87.5, Col. Venta Prieta,  
Pachuca, Hidalgo. C.P. 42080 A.P. 276  
Tels.: (771) 7105251, 170 0301, 170 0345 y 170 0687  
tecnm.mx | pachuca.tecnm.mx





**EDUCACIÓN**  
SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA



TECNOLÓGICO  
NACIONAL DE MÉXICO

Instituto Tecnológico de Pachuca  
División de Estudios de Posgrado e Investigación

Pachuca, Hidalgo, 24/Agosto/2021  
OFICIO No. DEPI-79-21

**C. INC. ESAÚ MOISÉS RODRÍGUEZ VIGUERAS  
PRESENTE**

La que suscribe, jefa de la División de Estudios de Posgrado e Investigación, le comunica que los miembros de la Comisión Revisora, designada por el Consejo de Posgrado de la Maestría en Ingeniería Mecánica para examinar su Tesis:

Modelo de orden fraccional para describir la  
respuesta viscoelástica de materiales  
compuestos

se han reunido, y después de intercambiar opiniones manifiestan su aprobación de la Tesis, en virtud que satisface los requisitos señalados por las disposiciones reglamentarias vigentes y, en consecuencia, se autoriza su impresión.

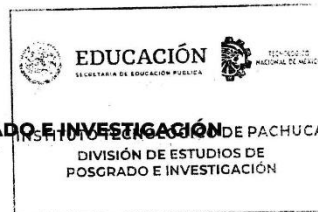
Sin otro particular por el momento, quedo de Usted.

**ATENTAMENTE**

*El Hombre Alimenta el Ingenio en Contacto con la Ciencia*

  
**M. A. C. ELODIA CLAUDIA GUERRERO ORTIZ**  
**JEFA DE LA DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO E INVESTIGACIÓN**

C.p. Archivo  
ECCO/LMPP



Carretera México-Pachuca Km. 87.5, Col. Venta Prieta,  
Pachuca, Hidalgo. C.P. 42080 A.P. 276  
Tels.: (771) 7105251, 170 0301, 170 0345 y 170 0687  
tecnm.mx | pachuca.tecnm.mx





**EDUCACIÓN**  
SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA



TECNOLÓGICO  
NACIONAL DE MÉXICO

Instituto Tecnológico de Pachuca  
División de Estudios de Posgrado e Investigación

Consejo de Posgrado de la Maestría en Ingeniería Mecánica

ACTA

Siendo las 13:00 horas del 19 de febrero de 2020, reunidos a distancia, el Consejo de Posgrado de la Maestría en Ingeniería Mecánica manifiesta la APROBACIÓN del tema de Tesis: *Modelo de orden fraccional para describir la respuesta viscoelástica de materiales compuestos*, con el siguiente contenido:



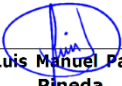


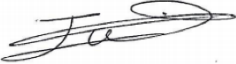
Resumen/Abstract  
Nomenclatura  
Contenido  
Índice de cuadros, gráficas y figuras.  
1- Introducción  
2- Estado del arte  
3- Marco teórico  
4- Materiales y métodos  
5- Resultados  
Conclusiones  
Bibliografía  
Apéndices

Para cubrir el requisito correspondiente a la Tesis para que el Ing. Esaú Moisés Rodríguez Viguera obtenga el grado de Maestro en Ingeniería Mecánica, bajo la dirección del Dr. Luis Manuel Palacios Pineda.

**ATENTAMENTE**

*El Hombre Alimenta el Ingenio en Contacto con la Ciencia*

**EL CONSEJO DE POSGRADO**

 Dr. Hugo Francisco Abundis Fong	 Dr. Armando Irvin Martínez Pérez	 Dr. Luis Manuel Palacios Pineda
 Dra. Erika Osiris Ávila Dávila	 Dr. Ignacio Ramírez Vargas	 Dr. Edgar Ernesto Vera Cárdenas
 Dra. Marisa Moreno Ríos	 Dr. Juan Serrano Arellano	 Dr. Valenté Hernández Pérez



Carretera México-Pachuca Km. 87.5, Col. Venta Prieta,  
Pachuca, Hidalgo. C.P. 42080 A.P. 276  
Tels.: (771) 7105251, 170 0301, 170 0345 y 170 0687  
tecnm.mx | pachuca.tecnm.mx



## Agradecimientos:

Agradezco al TecNM campus Pachuca, por permitirme continuar con mi formación académica. Así como al Doctor Luis Manuel Palacios Pineda por otorgarme su confianza y por su apoyo como mi director de tesis. A mis profesores y compañeros, que aportaron valiosas herramientas para integrarlas a mi formación como ingeniero. Agradezco al CONACyT por el apoyo económico, otorgándome una beca y hacer posible mi estancia como estudiante de tiempo completo. De igual forma a mis revisores, por sus observaciones y consejos que fueron importantes para la mejora de este documento. Aprovecharé el conocimiento adquirido para el bien de la nación y es un honor egresar de esta institución como ingeniero y como maestro en ciencias.

## Resumen

En este trabajo se obtuvo un modelo matemático de orden fraccional que permite predecir la respuesta viscoelástica de materiales compuestos. El modelo viscoelástico de orden fraccional que se presenta es un modelo paramétrico que caracteriza los esfuerzos causados por una carga controlada en un rango de altas y bajas frecuencias. Este modelo es derivado del modelo Zener y que parte de una ecuación diferencial ordinaria en régimen del tiempo y aplicando la teoría de cálculo fraccional. Mediante transformadas de Fourier se resuelve el modelo para obtener una solución en el dominio de la frecuencia. El modelo se aplica a trabajos realizados por investigadores, que, mediante experimentación, caracterizaron las propiedades dinámicas y magnéticas de diferentes materiales magnetorreológicos. Se compara el comportamiento viscoelástico experimental con el modelo fraccional. Particularmente en este trabajo se estudia el comportamiento de materiales magnéticos compuestos. Estos materiales están constituidos por una matriz polimérica y un material magnético de refuerzo.

Palabras clave: *cálculo fraccional, viscoelasticidad, elastómeros magnetorreológicos*

## Abstract:

In this work, a fractional order mathematical model was obtained that allows predicting the viscoelastic response of composite materials. The fractional order viscoelastic model presented is a parametric model that characterizes the stresses caused by a controlled load in a range of high and low frequencies. This model is derived from the Zener model and that starts from an ordinary differential equation under time and applying the theory of fractional calculus. Using Fourier transforms, the model is solved to obtain a solution in the frequency domain. The model is applied to work carried out by researchers, who, through experimentation, characterized the dynamic and magnetic properties of different magnetorheological materials. The experimental viscoelastic behavior is compared with the fractional model. Particularly in this work the behavior of composite magnetic materials is studied. These materials are made up of a polymeric matrix and a magnetic reinforcement material.

Keywords: fractional calculation, viscoelasticity, magneto-rheological elastomers

## Contenido

AGRADECIMIENTOS:.....	IV
RESUMEN .....	V
ABSTRACT: .....	VI
INDICE DE FIGURAS:.....	VIII
NOMENCLATURA: .....	X
<b>CAPÍTULO 1</b> INTRODUCCIÓN Y ESTADO DEL ARTE .....	1
<b>CAPÍTULO 2</b> MARCO TEÓRICO .....	9
2.1 Descripción general de los materiales poliméricos compuestos por partículas.....	9
2.2 Interpretación física del comportamiento viscoelástico.....	9
2.3 Propiedades de linealidad .....	10
2.4 Ecuación de Maxwell para viscoelasticidad lineal.....	11
2.5 Ecuación de Kelvin-Voigt para Viscoelasticidad lineal.....	14
2.6 Módulo de relajación no lineal de un material viscoelástico.....	15
2.7 Aportaciones para definir el cálculo fraccional (derivadas e integrales fraccionales).....	16
2.10 Descripción general de los materiales poliméricos compuestos por partículas:.....	17
2.11 Descripción general de polímeros compuestos por nanotubos de carbono de paredes múltiples MWCNT:.....	18
<b>CAPÍTULO 3</b> ELASTÓMEROS MAGNETOREOLÓGICOS.....	19
3.1 Manufactura de componentes poliméricos viscoelásticos espumas y materiales magnetoreológicos.....	19
3.2 Elastómero Magnetoreológico.....	19
3.3 Pruebas experimentales para la caracterización.....	20
3.4 Datos experimentales.....	21
<b>CAPÍTULO 4</b> MODELO DE ORDEN FRACCIONAL.....	26
4.1 Derivada e integral de orden fraccional de Riemann-Liouville.....	26
4.2 Modelo fraccional.....	27
4.3 Evaluación del Modelo de Zener.....	28
4.4 Aplicación del modelo complejo de Zener.....	30
4.5.2 Aplicación al material del caso B.....	32
4.5.3 Aplicación al material del caso C.....	33
4.5.4 Aplicación al material del caso D.....	34
4.5.5 Aplicación al material del caso E.....	35
4.5.6 Aplicación al material del caso F.....	39
4.5.7 Aplicación al material del caso G.....	41
4.5.8 Aplicación al material del caso H.....	42
CONCLUSIONES.....	44
REFERENCIAS .....	45
APÉNDICE A DATOS APLICADOS DE ORDEN PARA EL AJUSTE DE LAS CONDICIONES.....	49
APÉNDICE B TABLAS CORRESPONDIENTES A DATOS EXPERIMENTALES .....	51

## Índice de figuras:

Figura 1 - Aproximación de la función de relajación a los esfuerzos $G(t)$ para diversos valores de $\alpha$ y la curva obtenida de manera experimental [13].	4
Figura 2 - Comparación entre el modelo de orden fraccional y el experimental.	6
Figura 3 - Demostración gráfica de la deformación de un material compuesto por la aplicación de una carga sin deslizamiento.	7
Figura 4 - Porcentaje relativo bajo el efecto de un campo magnético en diferentes concentraciones de SO	7
Figura 5 - Esquema de un material compuesto por una matriz polimérica y un refuerzo de partículas ferrosas [23].	9
Figura 6 - Comportamiento de un material en función de la amplitud de la deformación y el número de Débora [24].	10
Figura 7 - Flujo en medio de dos placas moviéndose a una velocidad relativa a la placa inferior [26].	11
Figura 8 - Bloque de material, con una altura $h$ con un desplazamiento en la superficie superior (Lin, 2011)	12
Figura 9 - Modelo de Maxwell representado con un resorte y un amortiguador conectado en serie. (Lin, 2011)	13
Figura 10 - Arreglo del modelo viscoelástico de Kelvin-Voigt con un acoplamiento en paralelo. [15]	14
Figura 11 - Representación esquemática del modelo viscoelástico de Burgers o modelo combinado que contempla el acoplamiento en serie de un elemento de Maxwell y un elemento de Kelvin-Voigt [15]	15
Figura 12 Cadena gaussiana formada en $N-1$ muelles y $N$ partículas [26]	16
Figura 13 - Método de fabricación para una muestra magnetoreológica [7].	20
Figura 14 - Imagen de la microscopia electrónica de barrido (SEM) de un material elastómero MRE (a) anisotropía (b) Isotropía [7].	20
Figura 15 - Prueba en reómetro (Alineación de la muestra) [7].	21
Figura 16 - Adquisición de los datos experimentales	23
Figura 17- Modelo fraccional de Zener compuesto por dos elementos viscoelásticos y dos elásticos	27
Figura 18 - Archivo de Wolfram Mathematica para aplicar el modelo de orden fraccional.	29
Figura 19 - Influencia del orden fraccional $b$ (0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1) en el modelo Zener.	30
Figura 20 - Modelo complejo e Zener, ajuste para las pruebas experimentales encontradas por [28].	31
Figura 21 - Aplicación del modelo complejo de Zener en líneas continuas en contraste con los datos experimentales de [28].	31
Figura 22 - Modelo complejo e Zener, ajuste para las pruebas experimentales encontradas por [33].	32
Figura 23 - Aplicación del modelo complejo de Zener en líneas continuas en contraste con los datos experimentales de [33].	32
Figura 24 - Modelo complejo e Zener, ajuste para las pruebas experimentales encontradas por [30].	33
Figura 25 - Aplicación del modelo complejo de Zener en líneas continuas en contraste con los datos experimentales de [30].	33
Figura 26 - Modelo complejo e Zener, ajuste para las pruebas experimentales encontradas por [31]	34
Figura 27 - Modelo complejo e Zener, ajuste para las pruebas experimentales encontradas por [31]	34
Figura 28- Modelo complejo e Zener, ajuste para las pruebas experimentales encontradas por [34]. Pruebas realizadas bajo campo magnético de [0 mT].	36



Figura 29 - Aplicación del modelo complejo de Zener en líneas continuas en contraste con los datos experimentales de [34]. Pruebas realizadas bajo campo magnético de [ 0 mT]. ..... 36

Figura 30 - Modelo complejo e Zener, ajuste para las pruebas experimentales encontradas por [34]. Pruebas realizadas bajo campo magnético de [ 186 mT]. ..... 36

Figura 31 – Aplicación del modelo complejo de Zener en líneas continuas en contraste con los datos experimentales de [34]. Pruebas realizadas bajo campo magnético de [ 186 mT]. ..... 37

Figura 32 - Modelo complejo e Zener, ajuste para las pruebas experimentales encontradas por [34]. Pruebas realizadas bajo campo magnético de [ 336 mT]. ..... 37

Figura 33 - Aplicación del modelo complejo de Zener en líneas continuas en contraste con los datos experimentales de [34]. Pruebas realizadas bajo campo magnético de [ 336 mT]. ..... 37

Figura 34 – Modelo complejo e Zener, ajuste para las pruebas experimentales encontradas por [34]. Pruebas realizadas bajo campo magnético de [ 508 mT]. ..... 38

Figura 35 - Aplicación del modelo complejo de Zener en líneas continuas en contraste con los datos experimentales de [34]. Pruebas realizadas bajo campo magnético de [ 508 mT]. ..... 38

Figura 36 - Modelo complejo de Zener, ajuste para las pruebas experimentales encontradas por [34]. Pruebas realizadas bajo campo magnético de [ 747 mT]. ..... 38

Figura 37 - Aplicación del modelo complejo de Zener en líneas continuas en contraste con los datos experimentales de [34]. Pruebas realizadas bajo campo magnético de [ 747 mT]. ..... 39

Figura 38 - Modelo complejo de Zener, ajuste para las pruebas experimentales encontradas por [35]. Pruebas realizadas bajo campo magnético de [ 0 mT]. ..... 39

Figura 39 - - Aplicación del modelo complejo de Zener en líneas continuas en contraste con los datos experimentales de [35]. Pruebas realizadas bajo campo magnético de [ 0 mT]. ..... 40

Figura 40 - Modelo complejo de Zener, ajuste para las pruebas experimentales encontradas por [35]. Pruebas realizadas bajo campo magnético de [ 643 mT]. ..... 40

Figura 41 - Aplicación del modelo complejo de Zener en líneas continuas en contraste con los datos experimentales de [35]. Pruebas realizadas bajo campo magnético de [ 643 mT]. ..... 40

Figura 42 - Modelo complejo e Zener, ajuste para las pruebas experimentales encontradas por [38] ..... 41

Figura 43 - Aplicación del modelo complejo de Zener en líneas continuas en contraste con los datos experimentales de [38]. ..... 42

Figura 44 - Modelo complejo e Zener, ajuste para las pruebas experimentales encontradas por [43]. ..... 42

Figura 45 - Aplicación del modelo complejo de Zener en líneas continuas en contraste con los datos experimentales de [43]. ..... 43

## Nomenclatura:

$\gamma$  Deformación unitaria

$\dot{\lambda}$  Velocidad e deformación constante

$v$  Velocidad de placa superior

$d$  Distancia entre placas

$f$  fuerza en el fluido

$\sigma$  esfuerzo

$A$  área en contacto con el fluido de control

$\eta$  viscosidad definida

$h$  altura

$s$  distancia a la que separan las placas

$A$  área del material solido

$D_i$  Distancias de muelle y amortiguador

$F$  fuerza de tensión

$\dot{\lambda}$  tasa de deformación

$G$  Módulo de elasticidad

a Asociado con altas frecuencias

b Asociado con bajas frecuencias

$\tau_a, \tau_b$  Tiempos de relajación

$G_0$  Módulo relajado correspondiente a los valores de  $G'$  a bajas frecuencias

$G_U$  Módulo no relajado correspondiente e a los valores de  $G'$  a altas frecuencias

$\omega$  Frecuencia angular

$G'$  Módulo de almacenamiento (Storage modulus)

$G''$  Módulo de pérdida (Loss modulus)

$G^*$  Módulo complejo

## Capítulo 1 Introducción y estado del arte

Los elastómeros se caracterizan por que almacenan y disipan energía bajo carga de deformación. Debido a este comportamiento se considera que el material tiene un comportamiento tanto viscoso como elástico, por lo que se define a esta propiedad como viscoelasticidad. En los polímeros existen tres tipos de clasificaciones, los polímeros termoplásticos, termofijos y elastómeros. Dentro de la clasificación de materiales elastómeros se encuentran los elastómeros magnetorreológicos (EMR) que son fabricados de una matriz elástica como el caucho y un reforzante con propiedades magnéticas como el hierro magnético [1]. Por lo que, la viscoelasticidad de estos materiales es de gran relevancia para la aplicación de nuevos materiales en el control de vibraciones. Los materiales EMR se emplean como absorbedores de vibraciones adaptativos variando la intensidad de un campo magnético. Para el estudio de esta propiedad, empleando ecuaciones que modelan el módulo tanto de almacenamiento como el factor de pérdida [2].

El uso de amortiguadores fabricados con EMR requiere de una interpretación matemática para modelar sus propiedades y características inteligentes. La teoría de la viscoelasticidad implica que el modelo describa las propiedades intermedias entre un sólido y un líquido. El cálculo de derivadas fraccionales se emplea para el modelado matemático de materiales magnetorreológicos. Estos modelos son conocidos como modelos sólidos lineales estándar y se definen mediante un conjunto de parámetros que se comprueban con datos experimentales. Además, su respuesta a una carga o deformación depende, en algunos casos, de cualquier campo magnético, historial de deformación o historial de temperatura por lo que los modelos matemáticos no solo dependen del tiempo, sino que también de la frecuencia [3].

Los modelos dependen de otros factores para describir la viscoelasticidad con más precisión, por ejemplo, la termofluencia, es decir, un aumento progresivo de la temperatura bajo una carga dinámica; y la relajación o ablandamiento, que es una disminución gradual de los esfuerzos bajo una deformación constante. Ambos fenómenos influyen y, en muchos casos, limitan la aplicación de polímeros en aplicaciones estructurales y de carga. Ante este escenario es determinante contar con una relación matemática que describa el comportamiento viscoelástico de un material elastomérico con la finalidad de incorporarlo a un sistema que permita aislar vibraciones mecánicas en diferentes rangos de frecuencia [4].

El aislamiento de vibraciones en estructuras y máquinas es una técnica introducida en la teoría de las vibraciones, mediante el uso de dispositivos que modifiquen la rigidez del sistema. Este se aísla de la fuente de vibración mediante la inserción de

un miembro elástico o aislador. Existen varios tipos de aisladores, incluidos resortes metálicos, soportes de goma y soportes neumáticos. También, se observan efectos que alteran la respuesta viscoelástica del material, por ejemplo, la histéresis y el efecto Mullins (efecto de ablandamiento) cuando el caucho se carga cíclicamente [5].

El aislamiento de vibraciones generalmente se aplica por ejemplo en; la base de un sistema vibratorio protegiendo de grandes fuerzas de transmisión debido a la resonancia o a la masa desequilibrada giratoria. El sistema vibratorio, que puede ser un dispositivo o instrumento delicado, que está protegido del movimiento de en su base. De igual forma, el efecto Mullins se ha estudiado ampliamente en los últimos años como un efecto causado principalmente en elastómeros, por lo que, los estudios de estos efectos son cruciales para el desarrollo de materiales, como parte esencial para el diseño de nuevos productos. Las predicciones de la respuesta viscoelástica en estos materiales también se aplican ampliamente en materiales reforzados con productos nanotecnológicos como lo son, los nanotubos de carbono (Carbon Nano Tubes, CNT), los nanotubos de carbono de pared simple (Simple Wall Carbon Nano Tubes, SWCNT), nanotubos de carbono de pared múltiple (Multi Wall Carbon Nano Tubes, MWCNT) [6].

En cualquier situación, la transmisibilidad del sistema de aislamiento de vibraciones se modifica a una frecuencia dada a fin de reducir las vibraciones transmitidas a los cimientos, o suprimir el desplazamiento transmitido al delicado dispositivo en consideración. De aquí, la importancia del conocimiento preciso de la forma en cómo responderá el material aislante a la vibración.

Los materiales magnetoreológicos se han desarrollado por su gran variabilidad de rigidez al lograr aumentar su rendimiento con gran estabilidad. Se han realizado comparaciones en paralelo, de un modelo constitutivo del material compuesto, contra datos experimentales por cizallamiento. Para temas de investigación y los resultados generados de los modelos, se ajustan a las condiciones reales a las que se somete el material. Así, se define el comportamiento del material bajo procedimientos experimentales y también de modelamiento matemático. Aportando el estudio de las propiedades viscoelásticas, que se relacionan con la composición del material compuesto y sus propiedades mecánicas [7].

Con el modelo matemático de orden fraccional de Zener es posible describir el comportamiento viscoelástico de un material compuesto. Con este modelo se conseguirá caracterizar los materiales compuestos propuestos en este trabajo. Por otra parte, con el análisis numérico se conseguirá el cálculo de los módulos de almacenamiento (Storage modulus) y módulos de pérdida (Loss Modulus) del material sometido a cargas cíclicas, a diferentes intensidades de campos

magnéticos para compararlos con los datos experimentales y validar el modelo de Zener [7].

El objetivo general de este trabajo es obtener un modelo matemático para predecir la respuesta viscoelástica del material compuesto, así como evaluar los diferentes valores del orden de la derivada y ajustar el modelo a las condiciones experimentales.

Los objetivos específicos son: Extraer los datos experimentales de pruebas de reometría en artículos científicos de materiales magnetoreológicos. Obtener un modelo que describa el comportamiento viscoelástico y validar el modelo numéricamente comparándolo con el experimental

El cálculo surge en el siglo XVII gracias a los trabajos de Sr. Isaac Newton (1642-1727) y Gottfried Wilhelm Leibnitz (1646-1716). El principal objetivo del cálculo diferencial es el análisis del de cambio y movimiento, denotamos este cambio mediante una definición llamada “derivada” [8].

Leibnitz en 1695 hacía referencia al cálculo fraccional respondiendo a la pregunta de G.A. L'Hopital respecto a la notación para la n-ésima derivada de una función, ¿Qué sucedería si el orden de la derivada fuera  $1/2$ ? Por lo que, Leibnitz y L'Hopital se plantean por primera vez el sustituir el orden entero por el de la media derivada. El cálculo fraccional permite un planteamiento de derivada o de integral en ordenes no enteros, como una rama activa del análisis matemático sugiriendo así operadores diferenciales e integrales de orden racional, real o incluso complejo, por lo que, la designación más apropiada sería “Cálculo de Orden Arbitrario”. Sin embargo, la denominación adaptativa de “Calculo Fraccionario” perdura por razones históricas [9].

Las generalizaciones más populares del cálculo fraccional surgen de los trabajos de Gröndwald-Letniko (1867-1868) y Riemann-Liouville (1870-1884). Algunos estudiosos del tema señalan alternativas de derivada e integral fraccionaria como la integral fraccionaria de Weyl (1917), la integral fraccionaria de Riesz (1936), o la derivada fraccionaria de Caputo (1967) [9].

El cálculo fraccional se utiliza para construir relaciones tensión-deformación para materiales “viscoelásticos”. Estas relaciones se utilizan en el análisis de elementos finitos de estructuras amortiguadas viscoelásticamente y se encuentran soluciones de forma cerrada a las ecuaciones de movimiento. La característica atractiva de este enfoque es que se requieren muy pocos parámetros empíricos para modelar el material viscoelástico y calcular la respuesta de la estructura para las condiciones generales de carga [10].

Entre las aportaciones de mayor consistencia se encuentra la de Legendre (2019) et al, introduce un método numérico para la solución de ecuaciones diferenciales fraccionadas distribuidas lineales y no lineales, describiendo la derivada fraccional en el sentido de Caputo. También demuestra que las wavelets (ondículas) de Legendre son muy efectivas y fáciles de implementar. Solo se han documentado algunos métodos de solución para las EDFs (Ecuaciones Diferenciales Fraccionales), siendo las funciones más utilizadas seno-coseno, funciones de pulso de bloque, polinomios Legendre, Chebyshev y Laguerre [11].

D. Wu et al, exploró la aplicabilidad de varios modelos de pseudo tensión y deformación para predecir el comportamiento no lineal de un caucho ligeramente relleno. Mediante el uso de transformaciones de Laplace obtuvo soluciones de valor límite viscoelásticos no lineales con grandes deformaciones mediante el uso de pseudo variables. Debido a que las características de gran alargamiento y considerable contracción lateral en una prueba uniaxial tanto dentro como fuera del plano no pueden medirse con extensómetros, emplea un método óptico para rastrear las deformaciones en la superficie [12].

J. E. Palomares et al, determinaron adecuadamente un modelo viscoelástico y analizaron las implicaciones que se derivan de este, empleando un método numérico a partir del cual requiere de operaciones como la operación de convolución, con la finalidad de simular el comportamiento experimental de un material viscoelástico y comparar el modelo de orden fraccional, el modelo de orden entero y los datos experimentales. La establecieron una relación entre el esfuerzo y la deformación donde el experimento presento un comportamiento variado, el cual es cuadrático en pequeños intervalos de tiempo y lineal en tiempos mayores. En la figura 1 se muestra evaluado el modelo de orden ( $\alpha$ ) fraccional el modelo de Zener y es comparado con datos experimentales [13].

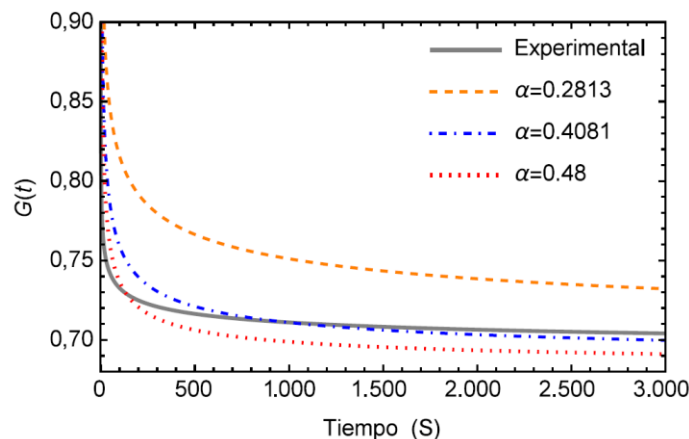


Figura 1 - Aproximación de la función de relajación a los esfuerzos  $G(t)$  para diversos valores de  $\alpha$  y la curva obtenida de manera experimental [13].

Por otra parte, se ha observado y estudiado experimentalmente el comportamiento reológico en diversos elastómeros magnetoreológicos, que contienen diferentes concentraciones de partículas de hierro. Los parámetros del modelo fraccional se encontraron al ajustar los datos experimentales, obteniendo un excelente acuerdo entre los resultados experimentales y las predicciones del modelo. Nadzharyan et al, ha demostrado que un modelo reológico fraccional puede describir satisfactoriamente, el comportamiento dinámico de los elastómeros magnetorreológicos al aplicar un campo magnético [14].

El modelo de orden fraccional se ajusta a condiciones reales de deformación, requiriendo pocos parámetros para modelar un material viscoelástico y calcular la respuesta de una estructura bajo condiciones generales de carga [10]. Sin embargo, desde que Mullins escribió su revisión sobre el fenómeno de ablandamiento, a la fecha no se ha encontrado un acuerdo general que describa la fuente física-mecánica de este efecto en un material polimérico; Aunque, se puede apreciar la cercanía con la que un modelo de orden no entero predice este comportamiento [15].

En 2015 Zhou modela el comportamiento de un material de amortiguación viscoelástico (VDM) por sus siglas en inglés. Zhou menciona, algunos modelos que se emplean en la ingeniería para estudiar las características de vibración estática y dinámica en las estructuras amortiguadas con materiales viscoelásticos [16].

De igual forma, Fombuena et al, realizó una breve descripción de los modelos matemáticos de viscoelasticidad como el modelo de Maxwell y el modelo de Kelvin-Voigt. Mencionando que en los polímeros hay condiciones de uso como la temperatura y tiempo, que desempeñan un papel fundamental en su comportamiento mecánico. Por lo que, los materiales poliméricos que poseen viscoelasticidad deben ser estudiados desde un planteamiento doble mediante una combinación de un comportamiento elástico y viscoso exhibiendo ambas características. Esta combinación de modelos en serie se denomina un modelo combinado o modelo de Burgers [17].

En este trabajo, se propone un modelo de orden fraccional describa el comportamiento viscoelástico de un material compuesto, con la finalidad de conseguir calcular las deformaciones, así como la energía almacenada y disipada con el material sometido a cargas dinámicas en determinado periodo de tiempo. Para la validación de este enfoque se fabrica una probeta compuesta de materiales poliméricos y partículas magnéticas. Con el fin de realizar pruebas de deformación estática y deformación dinámica. Obteniendo un panorama real de las

deformaciones y comparar los datos obtenidos con el modelo de orden fraccional y validar la similitud.

El reto de proporcionar un modelo complejo de los materiales viscoelásticos, es esencial para la industria del caucho, ya que por medio de las simulaciones se disminuyen considerablemente los costos que representa realizar pruebas experimentales. En la figura 2 se muestra una prueba cíclica para observar el ablandamiento que sufre el material polimérico; así mismo, se puede apreciar la cercanía con la que el modelo predice este comportamiento [15].

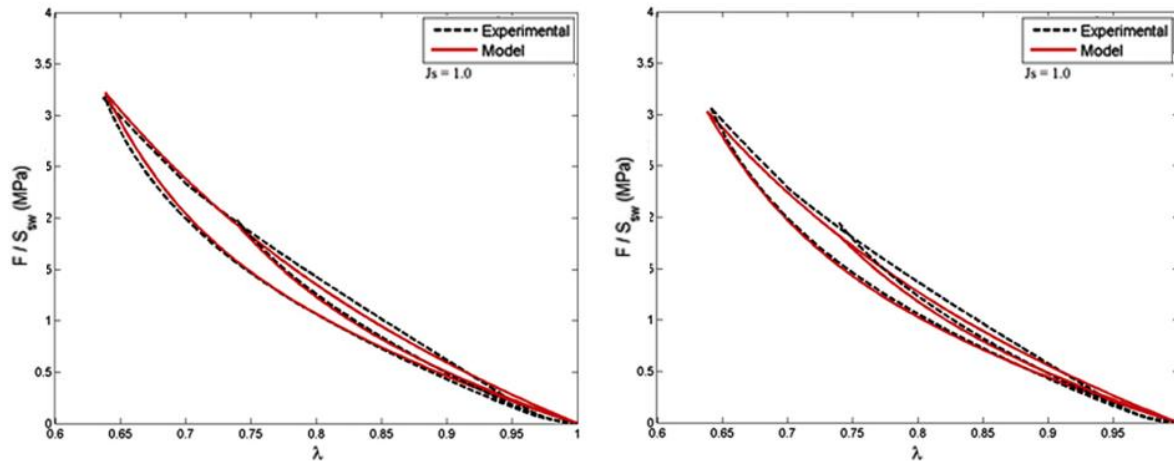


Figura 2 - Comparación entre el modelo de orden fraccional y el experimental.

Mostafa et al, realizó un estudio sistemático sobre la preparación, caracterización y modelado de elastómeros magnetoreológicos (MRE), con distribuciones de partículas ferromagnéticas isotrópicas y anisotrópicas, utilizo un reómetro equipado con un dispositivo magnético. Describiendo la respuesta viscoelástica desde un punto de vista experimental y analítico, así las propiedades magneto-mecánicas y los efectos de la inducción magnética, mostraron una rigidez más elevada al inducir campo magnético [18]. en la figura 3 se muestra gráficamente la deformación del material debido a la aplicación de una carga de deformación en la parte superior, este principio es el utilizado en los bancos de pruebas para obtener las propiedades mecánicas del material mencionado, es importante resaltar que el autor menciona que al incrementar la densidad de las partículas de un 5% a un 40%, no solo se refuerza el material sino que también se rigidiza, aumentando así la no linealidad en las curvas de esfuerzo y deformación.



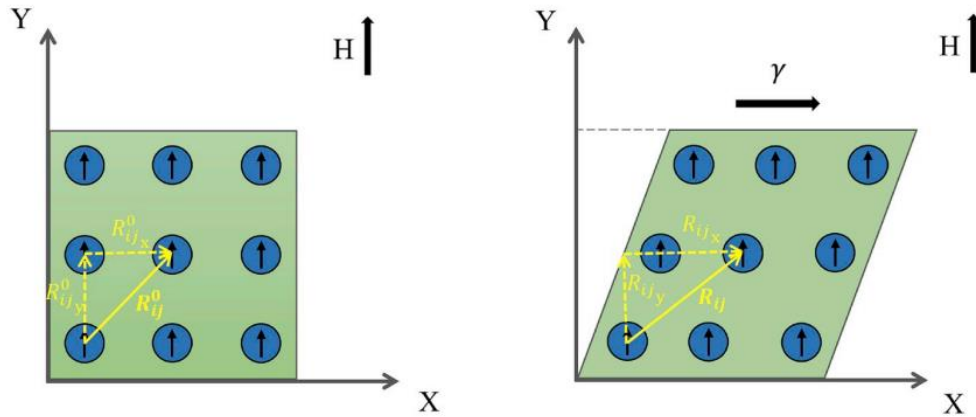


Figura 3 - Demostración grafica de la deformación de un material compuesto por la aplicación de una carga sin deslizamiento.

Una de las principales áreas de estudio de los materiales MRE más importantes es la síntesis, sabemos que para lograr contar con una buena fabricación existen diversas técnicas que mejoran las propiedades a través factores como la alineación de las partículas y la adherencia a la matriz polimérica. Ahmad M et al. Presento un nuevo enfoque para mejorar la alineación de las partículas a través de moldes de circuito cerrado generando un campo totalmente guiado dentro de la cámara, que fue diseñado para fortalecer el flujo magnético durante el proceso de polimerización, con la ayuda de plastificantes de aceite de silicona. Uno de sus hallazgos implicó que la efectividad del material MRE se asoció de igual forma al uso de los aceites de silicona (SO), por lo que se concluyó, que el uso del SO es potencialmente efectivo en aplicaciones industriales como en el amortiguamiento de las vibraciones que requieren un elevado rango de rigidez [19]. En la figura 4 se observa el incremento en la rigidez en contraste con las diferentes concentraciones de aceite de silicona, es de importancia resaltar, que es elevada la diferencia al no aplicar un SO y aplicarlo al 15%.

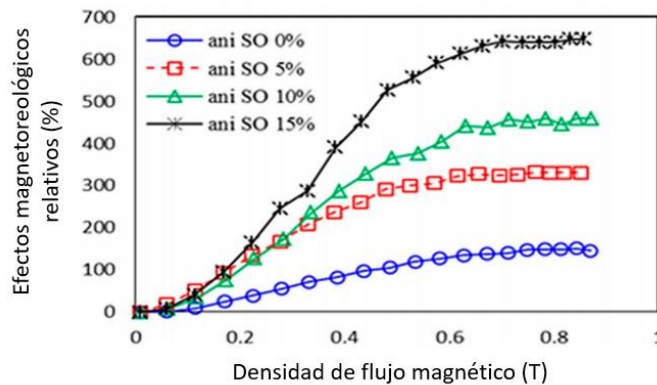


Figura 4 - Porcentaje relativo bajo el efecto de un campo magnético en diferentes concentraciones de SO

Así mismo, como los materiales rígidos son empleados en aplicaciones de aislamiento de vibraciones a bajas frecuencias, también los materiales MRE blandos son requeridos en aplicaciones como deformación rápida y grande bajo la acción (altas frecuencias), en actuadores de robots, electrónica flexible y dispositivos biomédicos por mencionar algunos ejemplos.

R. Poojary et al, empleó un material elastómero magnetoreológico para el estudio de la propiedad viscoelástica mediante un enfoque entero y fraccional. El modelo de orden fraccional incluye una cadena fraccional de Maxwell minimizando el error en el estudio de esfuerzo dinámico [20].

La respuesta viscoelástica de un material compuesto es un efecto utilizado en el amortiguamiento de máquinas y estructuras. La relación entre el elastómero y el relleno de refuerzo se encuentra constantemente lleno de contribuciones con el fin de aislar las vibraciones armónicas no deseadas [21]. Aunque los materiales magnetoreológicos son efectivos y fáciles de implementar, algunos materiales se diseñan para producir una mejor combinación de las propiedades mecánicas o bien reforzar un material con fibras o partículas magnéticas para controlar su desempeño induciendo un campo magnético así sus propiedades son adaptables al amortiguar las vibraciones [22].

## Capítulo 2 Marco teórico

### 2.1 Descripción general de los materiales poliméricos compuestos por partículas.

Estos pueden ser bien composites reforzados con partículas o con fibras. Este relleno influye directamente en el módulo elástico del material compuesto. Aunque, algunos materiales compuestos se diseñan para producir combinaciones poco comunes y no para mejorar la resistencia mecánica. En general una gran parte de los polímeros ingenieriles, contienen rellenos y extensores, que son compuestos particulares, para mejorar la resistencia, la rigidez, la dureza, la resistencia al desgaste etc.

La mayor parte de los materiales compuestos con matriz polimérica son particularmente utilizados en condiciones de resistencia y temperatura más elevadas que las de un polímero no reforzado. Cuando se une un material polimérico con un material metálico, debe tenerse una buena unión entre los varios constituyentes, ya que se puede desintegrar la unión causando una falla prematura.

Las partículas grandes no se pueden describir a nivel atómico sino mediante la mecánica continua a diferencia de los consolidados por dispersión que son partículas de entre 10 a 100  $\eta\text{m}$ . En la figura 5 se muestra de forma gráfica el material compuesto con la suma de una matriz y un refuerzo en forma de partícula [23].

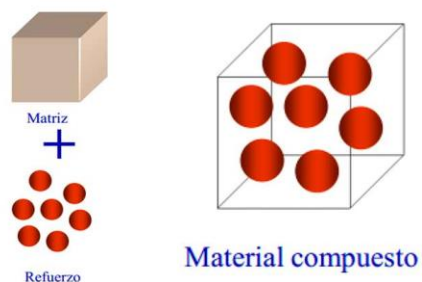


Figura 5 - Esquema de un material compuesto por una matriz polimérica y un refuerzo de partículas ferrosas [23].

### 2.2 Interpretación física del comportamiento viscoelástico.

Para la describir el comportamiento de un material viscoelástico se emplean parámetros en fusión de su naturaleza elástica y viscosa, este es un tipo de comportamiento reológico elástico es decir que como solido generalmente su deformación también depende del tiempo y de los esfuerzos resistidos. Físicamente, la elasticidad se debe al desplazar ligeramente los átomos de su posición de

equilibrio mientras que la viscosidad se debe a la difusión de átomos o moléculas en el interior del material.

Las dos categorías de comportamiento viscoelástico por separado están directamente de acuerdo con la ley de Hooke para los materiales elásticos y de acuerdo con la ley de Newton para comportamiento viscoso. De forma que la viscoelasticidad es un comportamiento intermedio, en el que el cuerpo sobre el que se aplicó una carga, esta almacena parte de la deformación aplicada.

Un parámetro adimensional utilizado en reología para caracterizar que tan fluido es un material, es el Numero de “Deborah” (**De**) palabra procedente del antiguo testamento según la cual “Las montañas fluyeron delante del señor” este parámetro fue introducido por uno de los fundadores de la reología el profesor Markus Reiner (1886), En cuanto al comportamiento bajo deformaciones bajas casi cercanas al equilibrio existe una relación lineal entre esfuerzo y deformación, en la figura 6 se muestra que la relajación deja de ser lineal en deformaciones menores y alcanza rápidamente la denominada zona de “Viscoelasticidad lineal” [24].

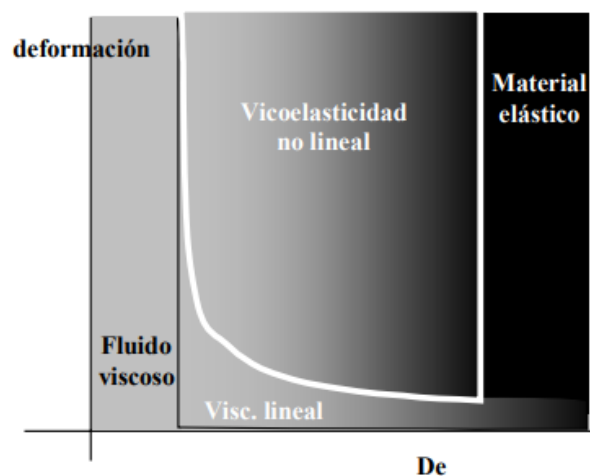


Figura 6 - Comportamiento de un material en función de la amplitud de la deformación y el número de Débora [24].

### 2.3 Propiedades de linealidad

La viscoelasticidad lineal es característica de una deformación directamente proporcional a su esfuerzo. Por tanto, la deformación y la velocidad de deformación son infinitesimales y la relación esfuerzo deformación dependen del tiempo, un límite en el estudio de las propiedades de un polímero viscoelástico está en la región lineal y el fenómeno es descrito en la nombrada ecuación generalizada de Maxwell o con superposición con la ecuación de Boltzmann [25].

En general en la viscoelasticidad lineal existe una relación lineal entre la tensión y sus derivadas y la deformación y sus derivadas. Los modelos más conocidos para este caso particular de linealidad son los modelos de Maxwell y Kelvin-Voigt [14].

Un material viscoelástico lineal admite matemáticamente una caracterización en la respuesta por deformación por fluencia lenta, esto sucede cuando el material viscoelástico es sometido a una tensión mecánica constante y de relajación [26].

#### 2.4 Ecuación de Maxwell para viscoelasticidad lineal.

La ecuación de Maxwell es la explicación más simple de la viscoelasticidad lineal, en la figura 7 se muestra un fluido viscoso entre dos placas paralelas de área  $A$ , y una distancia  $d$ .

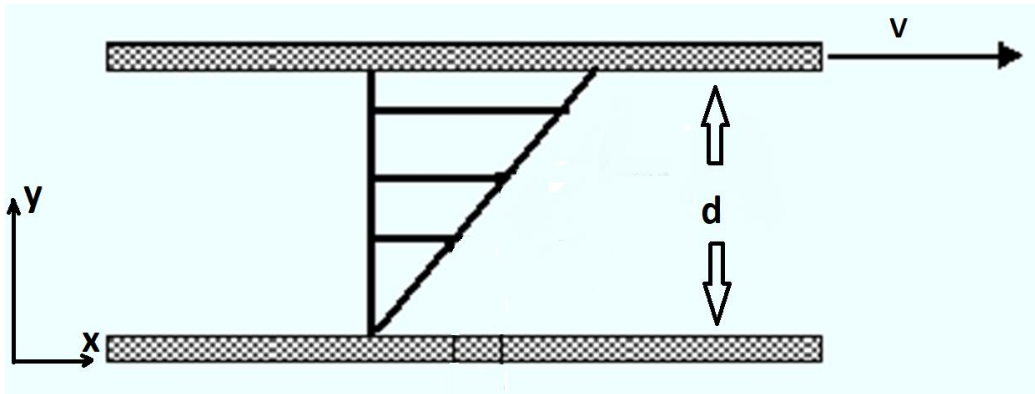


Figura 7 - Flujo en medio de dos placas moviéndose a una velocidad relativa a la placa inferior [26].

La placa superior se mueve a velocidad constante  $v$  con una fuerza  $f$  en dirección paralela de la superficie inferior. De tal manera que podemos definir la velocidad de deformación cortante con la ecuación 1 mostrada a continuación:

$$\dot{\lambda} = \frac{v}{d} \quad (1)$$

Y el esfuerzo es:

$$\sigma = -\frac{f}{A} \quad (2)$$

La viscosidad está definida por la siguiente formula:

$$\eta = -\frac{\sigma}{\dot{\lambda}} \quad (3)$$

Para la elasticidad, se considera un material sólido con áreas  $A$  y altura  $h$  como se muestra en la figura 8 las dos superficies pueden ser desplazadas con una distancia  $s$ . La deformación es definida con la siguiente ecuación:

$$\lambda = \frac{s}{h} \quad (4)$$

Esfuerzo:

$$\sigma = -\frac{f}{A} \quad (5)$$

Según la definición para un sólido Hookean, donde el esfuerzo es linealmente proporcional a la deformación:

$$G = -\frac{\sigma}{\lambda} \quad (6)$$

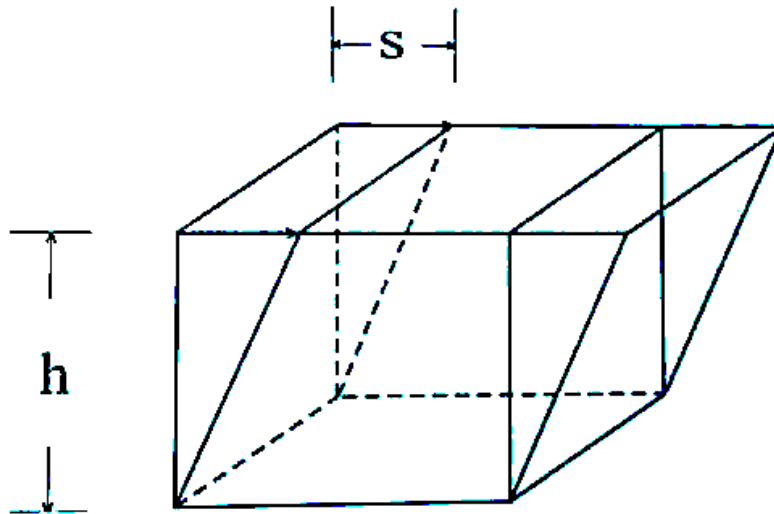


Figura 8 - Bloque de material, con una altura  $h$  con un desplazamiento en la superficie superior (Lin, 2011)

Mecánicamente, usando un amortiguador para representar la propiedad de viscosidad y un resorte para representar la propiedad de elasticidad. En el modelo de Maxwell el amortiguador y el resorte se conectan en serie como se muestra en la figura 9 en el comportamiento combinado resulta que el resorte almacena energía mientras que el amortiguador la libera.

$$G = -\frac{F}{(D_1 - D_0)} \quad (7)$$

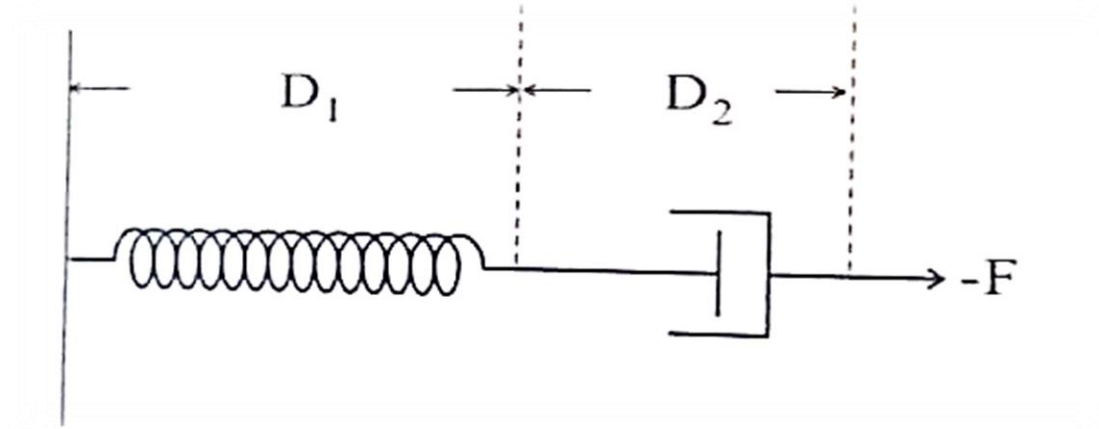


Figura 9 - Modelo de Maxwell representado con un resorte y un amortiguador conectado en serie. (Lin, 2011)

F es la fuerza de tensión D es la elongación del sistema a continuación se representa la viscosidad del sistema en serie.

$$\eta = - \frac{F}{dD_2/dt} \quad (8)$$

De la ecuación 7 y 8 los fluidos son:

$$\frac{dD}{dt} = - \frac{d}{dt}(D_1 + D_2) = - \left[ \frac{1}{G} \frac{dF}{dt} + \frac{F}{\eta} \right] \quad (9)$$

Reescribiendo la ecuación tenemos:

$$F + \frac{\eta}{G} \frac{dF}{dt} = -\eta \frac{dD}{dt} \quad (10)$$

Para describir la viscoelasticidad de un polímero se reemplaza F por el esfuerzo  $\sigma$  y  $dD/dt$  por la tasa de deformación  $\dot{\lambda}$  correspondiente a la siguiente ecuación:

$$\frac{d\sigma}{dt} + \frac{\sigma}{\tau} = -\frac{\eta}{G} \dot{\lambda} \quad (11)$$

Donde

$$\tau = \frac{\eta}{G} \quad (12)$$

Aproximación:

$$\tau \frac{d\sigma}{dt} = -\eta \dot{\lambda} \quad (13)$$

Aproximando la ecuación (3) para un fluido newtoniano con la ecuación (11) para realizar el factor de integración con el factor  $\exp(t/\tau)$ , la ecuación de Maxwell es fácil de transformar dentro de la integración:

$$\sigma = \int_{-\infty}^t G \exp\left(-\frac{(t-t')}{\tau}\right) \dot{\lambda}(t') dt' \quad (14)$$

La forma generalizada de la ecuación de Maxwell se expresa a continuación:

$$\sigma(t) = \sum_i^{\infty} \sigma_i(t) \quad (15)$$

### 2.5 Ecuación de Kelvin-Voigt para Viscoelasticidad lineal.

En este modelo, se considera el comportamiento viscoelástico de un polímero como el descrito por un acoplamiento en paralelo de un émbolo y un resorte. En la figura 10 se muestra el arreglo en paralelo que representa el elemento elástico y viscoso del modelo de Kelvin-Voigt.

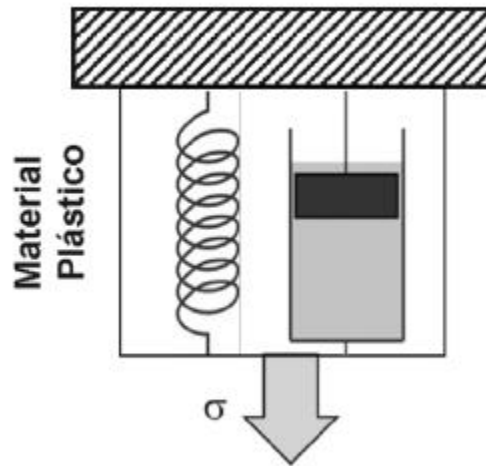


Figura 10 - Arreglo del modelo viscoelástico de Kelvin-Voigt con un acoplamiento en paralelo. [15]

Para calcular el esfuerzo total se deben calcular por separado como la suma del esfuerzo que ejerce el muelle ( $\sigma_1$ ) y el esfuerzo ( $\sigma_2$ ) y de la misma forma la deformación tal como se muestra en la ecuación (16) y (17):

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 \quad (16)$$



$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \quad (17)$$

Teniendo en cuenta la variable tiempo y como referencia la expresión de la actividad de las tenciones la ecuación (16). Despejando las tenciones de la parte elástica de la ecuación (17) y la parte viscosa de la ecuación de Newton se obtiene la ecuación general del modelo de Kelvin-Voigt.

$$\sigma = \xi\varepsilon + \eta \frac{d\varepsilon}{dt} = \xi\varepsilon + \eta \frac{d\varepsilon}{dt} \quad (18)$$

es posible aproximar la deformación total en el modelo combinado o de Burgers según la siguiente expresión:

$$\varepsilon = \varepsilon_M + \varepsilon_{KV} \quad (19)$$

De tal forma que remplazando los modelos se obtiene que:

$$\varepsilon = \frac{\sigma_0}{\xi_M} + \frac{\sigma_0}{\eta M} t + \frac{\sigma_0}{\xi_{KV}} (1 - e^{-\xi_{KV}/\eta_{KV} t}) \quad (20)$$

Por último, se ilustra en la figura 11, el esquema donde se muestra la suma de los modelos de Maxwell y el Modelos de Kelvin-Voigt

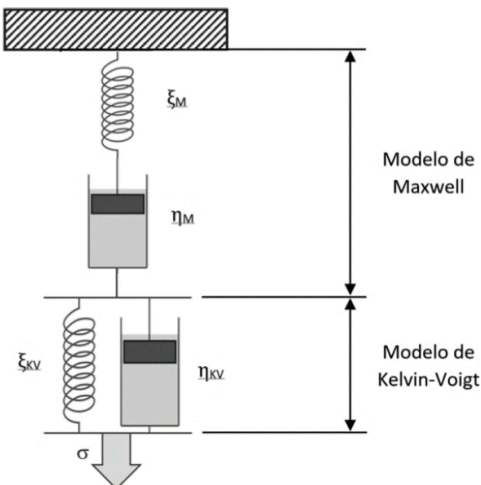


Figura 11 – Representación esquemática del modelo viscoelástico de Burgers o modelo combinado que contempla el acoplamiento en serie de un elemento de Maxwell y un elemento de Kelvin-Voigt [15]

## 2.6 Módulo de relajación no lineal de un material viscoelástico.

El módulo de relajación no lineal es un fenómeno correspondiente a lo largo de una región de fuerzas de tensión derivada de la distribución segmentada no lineal, constituyendo generalmente el total de los esfuerzos. Experimentalmente en la región de esfuerzos no lineales, el esfuerzo más alto corresponde a un módulo de relajación alto, así que para el estudio de relajación no lineal de N-Partículas en cadenas de Fraenkel mostradas en la figura 12 [25].

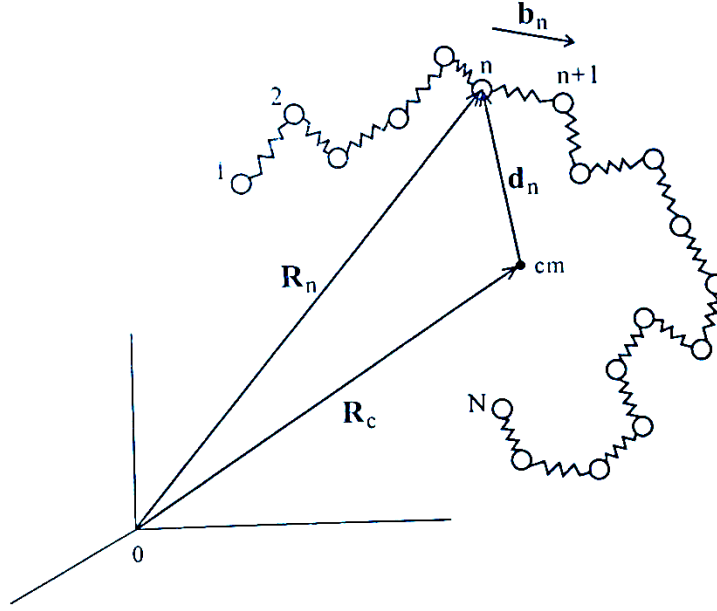


Figura 12 Cadena gaussiana formada en  $N-1$  muelles y  $N$  partículas [26]

La diferencia con los materiales lineales es que el muelle se conecta en ocasiones con dos partículas en vez de una y por esa razón en lugar de ser entrópico, se caracteriza por el potencial de Fraenkel mencionado en la ecuación (20).

$$U_F = \frac{H_F}{2} \sum_{n=1}^{N-1} \left( \frac{|R_n - R_{n+1}|}{b_0} - 1 \right)^2 \quad (21)$$

Se afirma que el total de las fuerzas internas en las partículas está dado por los dos resortes conectadas a ellas mostrada esta adición en la ecuación (21).

$$F_n(i) = -\frac{H_f}{b_0^2} (2R_n(i) - R_{n+1}(i) - R_{n-1}(i)) + \frac{H_f}{b_0} \left[ \frac{R_n(i) - R_{n+1}(i)}{|R_n(i) - R_{n-1}(i)|} + \frac{R_n(i) - R_{n+1}(i)}{|R_n(i) - R_{n+1}(i)|} \right] \quad (22)$$

entonces la fuerza total afirmada interna por los dos resortes inmediatos (fuerza de Frankel) es una función no lineal de las posiciones del cordón, la ecuación de Langevin de una cadena de Frankel no puede resolverse analíticamente; La simulación de Monte Carlo para esfuerzos de relajación de la cadena de Frankel, se convierte en un medio crucial para obtener su solución.

## 2.7 Aportaciones para definir el cálculo fraccional (derivadas e integrales fraccionales)

En esta sección se mencionarán las siguientes aportaciones más relevantes en el cálculo de orden fraccional principalmente las aplicadas en investigaciones de

deformaciones viscoelásticas y expresadas en su forma general en la Tabla 1 como se muestra a continuación de las definiciones mencionadas que son relevantes en los remas combinados de viscosidad y elasticidad [27].

Tabla 1 – Modelos de orden fraccional extraída de [27].

<b>Derivada</b>	<b>Modelos de orden fraccional</b>
Derivada fraccionaria de Liouville	$\frac{d^\mu \phi(x)}{d(x)} = \frac{1}{(-1)^p \Gamma(p)} \int_0^\infty \frac{d^n}{dx^n} [\phi(x+\alpha)] \alpha^{p-1} d\alpha \quad (23)$
Derivada fraccionaria de Grünwald-Létnikov	$\begin{aligned} \frac{d^\alpha f(x)}{dx^\alpha} &= \frac{d^n}{dx^n} \mathcal{J}^\nu f(x) \\ &= \frac{d^n}{dx^n} \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}} dt \end{aligned} \quad (24)$
Derivada fraccionaria de Riemann	$\begin{aligned} \frac{d^\alpha f(x)}{dx^\alpha} &= \frac{d^n}{dx^n} \mathcal{J}^\nu f(x) \\ &= \frac{d^n}{dx^n} \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_k^x \frac{f(t)}{k(x-t)^{\alpha-n+1}} dt \end{aligned} \quad (25)$
Derivada fraccionaria de Caputo	$D^\alpha f(t) = \left( f(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!} f^k(0^+) \right) = D^\alpha f(t) \quad (26)$

## 2.10 Descripción general de los materiales poliméricos compuestos por partículas:

Estos pueden ser bien materiales compuestos reforzados con partículas o con fibras. Este relleno influye directamente en el módulo elástico del material compuesto. Aunque algunos materiales compuestos se diseñan para producir resistencia mecánica. En general una gran parte de los polímeros ingenieriles, contienen rellenos y extensores, que son compuestos particulares, para mejorar la resistencia, la rigidez, la dureza, la resistencia al desgaste etc. La mayor parte de los materiales compuestos con matriz polimérica son particularmente utilizados en condiciones de resistencia y temperatura más elevadas que las de un polímero no reforzado. Cuando se une un material polimérico con un material metálico debe

tenerse una buena unión entre los varios constituyentes ya que se puede desintegrar la unión causando una falla prematura.

Las partículas grandes son interacciones con partículas grandes no se pueden describir a nivel atómico sino mediante la mecánica continua a diferencia de los consolidados por dispersión que son partículas de entre 10 a 100  $\eta\text{m}$

### **2.11 Descripción general de polímeros compuestos por nanotubos de carbono de paredes múltiples MWCNT:**

Incorporar diferentes tipos de nanotubos de carbono en un elastómero refuerza las propiedades mecánicas y reológicas del material y se destacan varias propiedades en el elastómero Aziz S. et al (2017) menciona que al incorporar nanotubos de carbono de paredes múltiples (MWCNT) se observa un aumento en la resistencia a la tracción, resistencia a la abrasión e incorpora propiedades eléctricas por lo que incorporar los MWCNT como aditivo o reforzante genera un campo de investigación hacia nuevas aplicaciones de los EMR.

Los MWCNT se investigan ampliamente para aplicaciones como rellenos y aditivo en diferentes polímeros, dependiendo de sus síntesis obtendremos diferentes tipos de nanotubos, modificando características de los nanotubos tales como la longitud, diámetro, calidad superficial, pureza, transferencia de tensión intersticial y resistencia a la aglomeración. Es importante mejorar en paralelo las propiedades mecánicas y reológicas especialmente para centrar la atención en las propiedades magnéticas ya que diversos estudios han descrito un incremento superior al aplicar campos magnéticos realizando estudios de análisis morfológicos, de compresión y cizallamiento. Las paredes múltiples proporcionan mejoras reológicas en el material compuesto, Aziz S. et al menciona un incremento del 11% de resistencia a la tracción por el aditivo de nanotubo de carbono.

## Capítulo 3 Elastómeros magnetorreológicos

En este capítulo se revisa el proceso de manufactura de los elastómeros magnetorreológicos y se detalla cada uno de los datos experimentales que se utilizan en el presente trabajo.

### 3.1 Manufactura de componentes poliméricos viscoelásticos espumas y materiales magnetorreológicos.

El espumado es el que comúnmente se denomina material célula abierta. La ventaja es que facilita la entrada y salida del aire. Se distingue del espumado en la reacción química entre los distintos elementos. En el molde cerrado, el resultado es que las células son más pequeñas. La ventaja es una densidad garantizada y es homogénea.

Otro aspecto para tomar en cuenta es la calidad de las espumas que se usan. No es lo mismo una espuma denominada sólo como viscoelástica que una que garantiza ser de alta resistencia o capacidad de recuperación. Esto significa que la espuma ha sido sometida a una prueba de fatiga dinámica, en la que se estresa el material para garantizar su resistencia.

### 3.2 Elastómero Magnetorreológico

Para obtener elastómeros magnetorreológicos se usa aceite de silicona (SO) con un valor de viscosidad de  $0.25 \text{ Pa} \cdot \text{s}$ , caucho de silicona RTV3325 (SR) con un valor de viscosidad de  $0.40 \text{ Pa} \cdot \text{s}$  y catalizador de estaño (TC). Las partículas de carbonilo hierro con un tamaño promedio de  $2.5 \mu\text{m}$ .

Todos los constituyentes se mezclan a temperatura ambiente durante 5 min. La alta viscosidad de la solución requiere una alta velocidad del proceso de mezcla, para evitar la sedimentación de las partículas magnéticas agregadas.

La mezcla homogénea se colocó en un molde y el proceso de curado se llevó a cabo a temperatura ambiente durante 12 h, bajo condiciones de vacío para evitar la porosidad. Durante el proceso de curado, solo las muestras anisotrópicas reforzadas se expusieron a una densidad de flujo magnético de 7 mT. En la figura 13 se muestra el esquema del proceso de fabricación para el material magnetorreológico que se usó en el trabajo realizado por [7].

### 3.3 Pruebas experimentales para la caracterización.

Para evaluar la homogeneidad del material compuesto y su alineación de partículas. Se realizó una microscopía electrónica de barrido (SEM, Quanta 250-FEG FEI) En la figura 14 (a) se muestra la distribución de las partículas exhibida por las muestras anisotrópicas, mientras que en la figura 14 (b) se muestra la distribución isotrópica del material compuesto. [7]

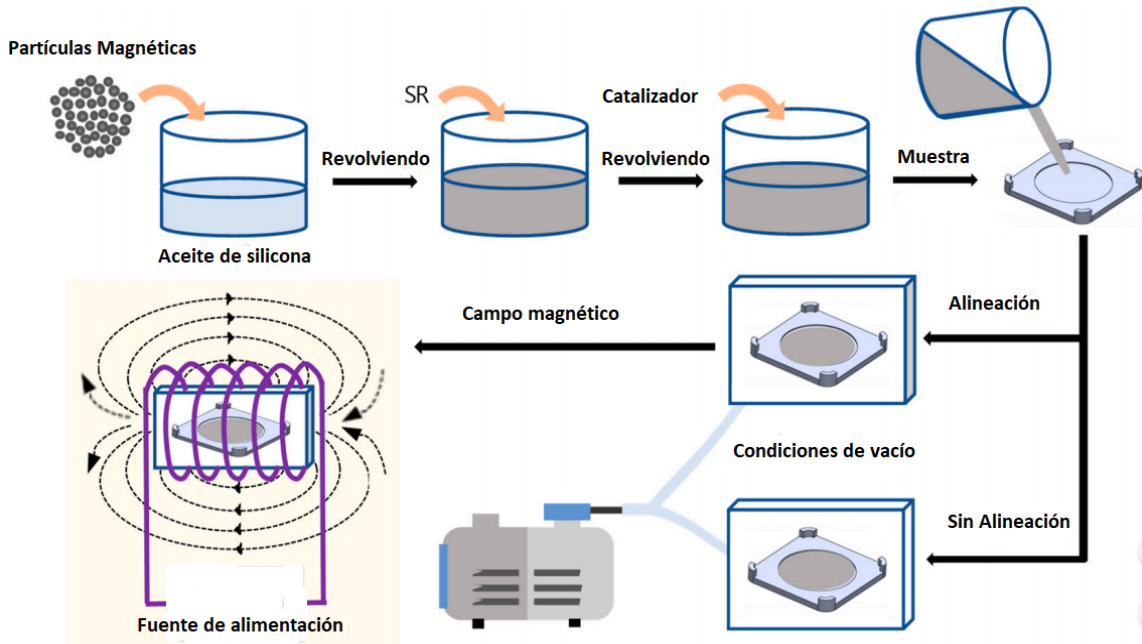


Figura 13 - Método de fabricación para una muestra magnetoreológica [7].

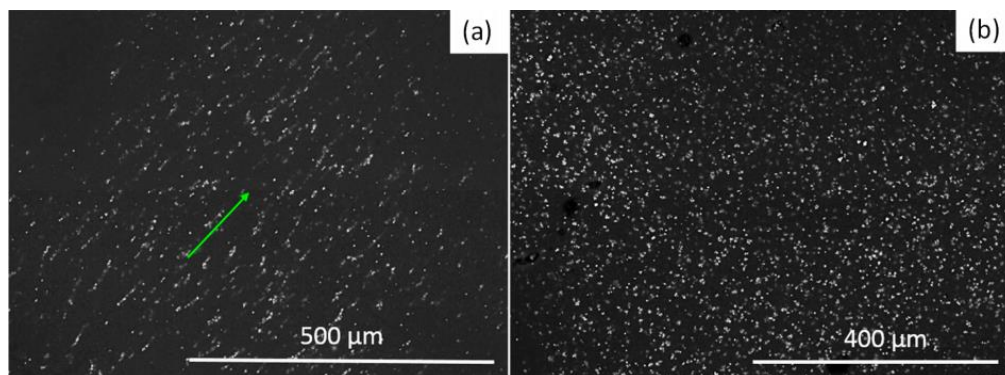


Figura 14 - Imagen de la microscopía electrónica de barrido (SEM) de un material elastómero MRE (a) anisotropía (b) Isotropía [7].

Para identificar el módulo de corte complejo se realiza un experimento de reología, la prueba experimental consiste en instalar un rotor de placa paralela en el reómetro, y todas las pruebas experimentales se realizaron a temperatura ambiente (25°C) utilizando muestras cilíndricas de 10 mm de diámetro con 1 mm de espesor. Cada muestra se somete a un movimiento armónico en modo de corte angular, sometido a un rango de frecuencias de 0,01 a 100 Hz, para inducir un valor de deformación por corte del 1% [7].

En la figura 15 se observa el arreglo para el reómetro, se muestra esquemáticamente la alineación de las muestras respecto a la placa superior.

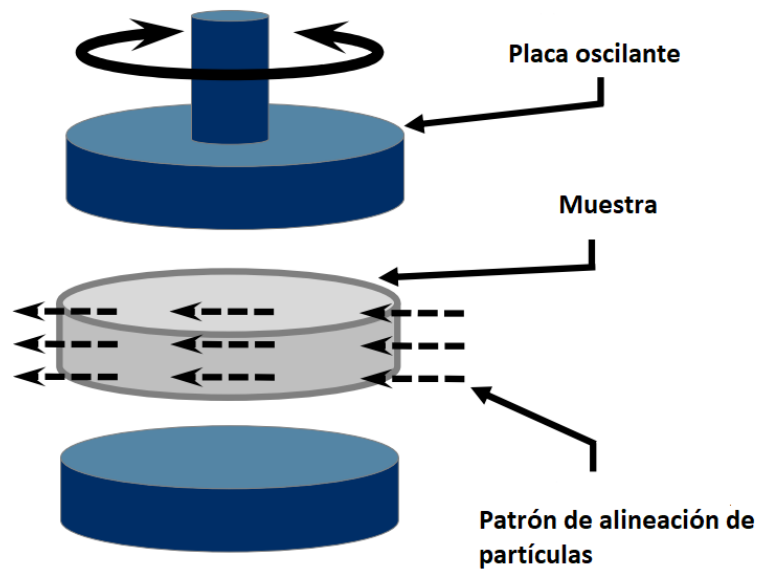


Figura 15 - Prueba en reómetro (Alineación de la muestra) [7]

### 3.4 Datos experimentales

A partir de datos experimentales disponibles en la literatura, se ajustó el modelo de orden fraccional para caracterizar su comportamiento. A continuación, se describe cada uno de los conjuntos de datos experimentales utilizados. Además, se describen las condiciones en las que se llevó a cabo la respectiva caracterización reológica.

Volpe V, et al. propone la combinación del concepto de elastómeros magneto-sensibles al proceso de moldeo por inyección. En su trabajo utiliza elastómeros de poliolefina, Engage 8402, es un polímero de etileno-octeno que funciona en una amplia gama de aplicaciones de elastómeros termoplásticos. Como reforzante

utilizó polvo de carbonil hierro con un contenido mínimo de 99.5%, tamaño de la partícula inferior a 10micras. Menciona que las propiedades reológicas se obtuvieron mediante reómetro rotativo Haakr Mars (Thermo Haake GmGH, Alemania), realizando una variación del reforzante en un 50% Fe en peso. Estas pruebas se llevaron a cabo en diferentes temperaturas (160 °C, 189 °C y 200°C) obteniendo así la dependencia de la viscosidad compleja,  $G'$  y  $G''$  de la frecuencia de oscilación [28]. Los datos obtenidos por el investigador se incluyen en la tabla B1.

Abdul S, et al, investiga las características reológicas un Elastómero Magnetoreológico (MRE) por sus siglas en inglés, con partículas corroídas de carbonil hierro en condiciones ambientales. Las interacciones de las partículas con el oxígeno reducen sus propiedades magnéticas. Los resultados del módulo de almacenamiento  $G'$  (Storage Modulus) y factor de perdida (Loss Factor) se obtuvieron de las pruebas de frecuencia a diferentes intensidades de campo magnético variando las corrientes de 0, 1, 2, 3 A [29]. Los datos del investigador se incluyen en la tabla B2 del apéndice B.

Por otra parte, Wittenberg E et al, empleó copolímeros de estireno-butadieno con fracciones variables de restos de ácido benzoico. Estudió las propiedades mecánicas que dependientes de la temperatura debido a que el enlace de hidrogeno tiene un marcado impacto en las propiedades del material ya que facilita la formación de una red de polímero supramolecular. Puntualmente, el material que se emplea en este trabajo es pStyroxflex 2G66 (S-S/B-S), es un copolímero tribloque con bloques finales de estireno y un bloque de estireno-butadieno al azar. El resto del ácido benzoico de introdujo a través de CuAAC. Se sintetizó el polímero con tres grados de modificación (4%, 7%, 15% de modificación de relación con el numero total de unidades repetidas en el polímero) y así investigar el impacto del grado de modificación de las propiedades de los materiales [30]. Los datos de  $G'$  y  $G''$  se incluyen en la tabla B3 del apéndice B.

La fabricación de un elastómero magnetoreológico representa algunas dificultades, por ejemplo, las pérdidas del flujo magnético dentro de la cámara de fabricación. Ahmad M et al, presento un nuevo enfoque diseñando un molde de circuito cerrado, que guía el campo magnético dentro de la cámara de moldeo para fortalecer el flujo magnético durante el proceso de curado con la ayuda de plastificantes de aceite de silicona (SO) que sirve para ablandar la matriz. Sin embargo, al agregar 5% de silicona, la resistencia disminuyó y disminuyo más al agregar 10% y 15%, en probetas isotrópicas y anisotrópicas con un campo magnético de 0 y 600 mT. Aunque la resistencia disminuyó el material se tornó más flexible y suave útil en aplicaciones que así lo requieren [31].



Los datos experimentales publicados se obtuvieron mediante una técnica de correlación de imágenes, tomando como referencia los píxeles de la gráfica del módulo de almacenamiento y del módulo de pérdida. La figura 16 muestra un ejemplo del método mencionado y por el cual se obtuvieron los datos experimentales utilizados en el presente estudio.

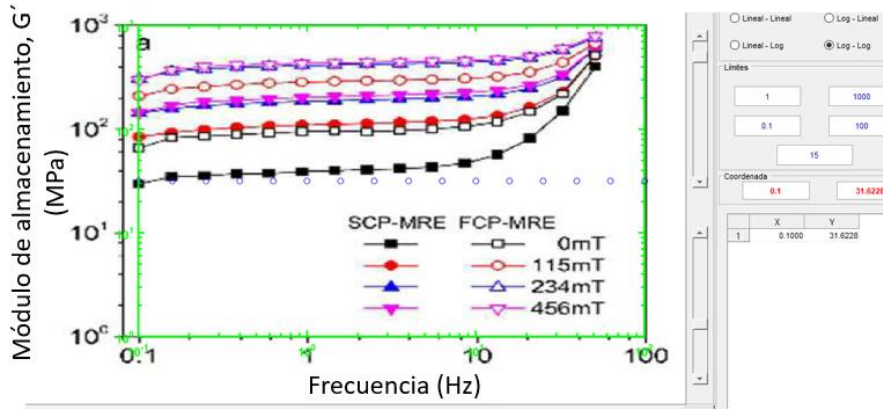


Figura 16 - Adquisición de los datos experimentales

La Tabla 2 muestra cada uno de los conjuntos de datos experimentales utilizados en el presente trabajo. En total son ocho conjuntos de datos a los que se asigna un código alfabético para realizar una referencia más clara durante el resto del documento.

Tabla 2 - Materiales de prueba empleados por los autores:

Caso	Autores	Descripción	Elastómero Matriz	Material Reforzante
A	Volpe V et al [32]	Material EMR hecho con termoplástico y reforzado con partículas de hierro magnético.	Elastómero de poliolefina, Engage 8402 Suministrado por DuPontDow Midland, Michigan, EE. UU.	Partículas de carbonil hierro suministradas por Basf (Ludwigshafen, Alemania). Contenido de carbono 0.05 % con un tamaño de partícula inferior a 10 micrones
B	Abdul S, et al [33]	Material EMR hecho con Elastómero termoplástico reforzado con partículas de	Caucho a base de silicona.	partículas de carbonil hierro (CIP) tratados con ácido clorhídrico (HCl) como una forma de proporcionar entornos realistas al medir la reacción

		hierro magnético.		de los CIP hacia las condiciones ambientales
C	Wittenberg E et al [30]	Material elastómero hecho con polímero estireno-butadieno.	Styroflex 2G66 (S – S / B – S) suministrado de BASF, Ludwigshafen, Alemania. Buna SBR2300 (S / B) Fue recibido con agradecimiento de Arlanxeo, Colonia, Alemania.	
D	Ahmad M et al [31] material EMR.	Material EMR termoplástico hecho con caucho de silicona y partículas magnéticas.	Caucho de silicona, tipo RTV-two NS625 / Nippon Steel de Tokio, Japón. El plastificante utilizado fue aceite de silicona (SO), adquirido en Nippon Steel, Tokio, Japón. la densidad del SO fue de 1.26 g / cm <sup>3</sup>	Las partículas magnéticas utilizadas fueron partículas de carbonil hierro (CIP) de BASF, Ludwigshafen, Alemania. Las densidades tanto del caucho de silicona como del CIP fueron 1.08 g / cm <sup>3</sup> y 7.874 g / cm <sup>3</sup> , respectivamente.
E	Abdul S, et al [34]	Material EMR termoplástico hecho con caucho natural y reforzado con partículas de hierro y nanotubos de carbono.	Caucho natural (SMR-20) producido de caucho de Malasia se utilizó como matriz para las muestras de MRE.	Se utilizó partícula de carbonil hierro (CIP) como relleno con un diámetro medio de 6 mm (BASF, Alemania). Los MWCNT, COOH – MWCNT (carboxilado multipared nanotubos de carbono) y OH-MWCNT (hidroxilado

				nanotubos de carbono de paredes múltiples) se adquirieron en Ltd, China del puerto de la nanotecnología de Shenzhen. La fracción de masa para los CIP en MRE es 60/183, que es aproximadamente el 33% en peso de la muestra.
F	Abdul S, et al [35]	Material EMR termoplástico hecho con caucho natural y reforzado con partículas de hierro y nanotubos de carbono.	aceite de palma epoxidado (Rovpro 5300, Rovski Industries Sdn. Bhd). En segundo lugar, caucho 100 phr, aceite de palma epoxidado 10 phr.	30% en peso de partículas de carbonil hierro (CIP), 0,1% en peso de MWCNT y aditivos (5 phr óxido de zinc, 2 phr ácido esteárico, 1,5 phr santoflex, 2,5 phr azufre.
G	Hemmatian . et al. [36]	Material EMR termoplástico hecho con caucho natural y reforzado con partículas de hierro magnético.	La matriz fue elegida como el caucho de silicona (Ecoflex0020 - Smooth on)	El CIP esférico de grado SQ, con tamaño de partícula que van desde 3,9 a 5,0 $\mu\text{m}$ , fabricado por BASF Corporation
H	Zhu G. et al. [37].	Material EMR termoplástico hecho con caucho natural y reforzado con partículas de hierro magnético.	caucho de silicona (Wacker Chemie AG, Alemania)	partículas de hierro de tamaño micrométrico (Sigma-Aldrich, EE. UU.)

## Capítulo 4 Modelo de orden fraccional

Este capítulo inicia con la descripción general del modelo de orden fraccional utilizado y la aplicación que se realiza a diferentes datos experimentales de elastómeros magnetorreológicos.

### 4.1 Derivada e integral de orden fraccional de Riemann-Liouville

Para abordar el tema se usará un método sintético puesto que el principal objetivo es lograr unificar los diversos elementos del fenómeno viscoelástico y a su vez comprender la naturaleza y la esencia de la viscoelasticidad.

El modelo viscoelástico de Zener es una adecuación del modelo lineal estándar (SLS por sus siglas en inglés). Padovan y Guo investigaron las propiedades de impulsos transitorios y estacionarios de una respuesta viscoelástica fraccionada de tipo Maxwell-Kelvin Voigt [7]. Descubrieron que la representación fraccional no es lineal con respecto a estas cantidades. Para lograr una derivada de orden fraccional ( $0 \leq a \leq 1$ ) en las ecuaciones constitutivas del material, el amortiguamiento reológico que depende de la primera derivada del desplazamiento puede remplazarse por un orden fraccional [7] tal como se presenta en la siguiente ecuación:

$$\sigma = G\tau^a D_t^a \gamma \quad (27)$$

Donde  $\sigma$ ,  $\gamma$  y  $G$  representan al esfuerzo cortante, la deformación unitaria y el módulo de corte, respectivamente,  $\tau$  representa el tiempo de relajación, que está asociado con el tiempo requerido para que las cadenas moleculares se reorganicen y se reorienten a una nueva condición de equilibrio; es decir, el ablandamiento del material respecto del tiempo. Según Riemann- Liouville, la derivada temporal ( $d/dt$ ) de orden fraccional se define como:

$$D_t^a \gamma = \frac{1}{\Gamma(1-a)} \frac{d}{dt} \int_0^t (t-y)^{-a} \gamma(y) dy \quad (28)$$

Donde  $\Gamma(x)$  es la función Gamma que se define como:

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} (e^{-u} u^{x-1}) du \quad (29)$$

En consecuencia y para mejor comprensión si nos encontramos con un orden de  $a = 1$  se obtiene un comportamiento viscoso según la ley de Newton; pero, por otra parte, si tenemos un valor de  $a = 0$  obtenemos un comportamiento elástico según la ley de Hooke. La combinación de las propiedades elásticas y viscosas son lo que conocemos como viscoelasticidad y este comportamiento lo encontramos en el valor fraccional del orden de la derivada e integral de Riemann-Liouville, razón por la que

el cálculo fraccional permite modelar con mayor precisión el comportamiento viscoelástico.

### 4.2 Modelo fraccional

El modelo clásico de Zener puede modificarse con dos elementos viscoelásticos *a* y *b*, el primero (*a*) asociado con la viscoelasticidad a altas frecuencias y el segundo (*b*) asociado con el comportamiento a bajas frecuencias, ver la figura 17.

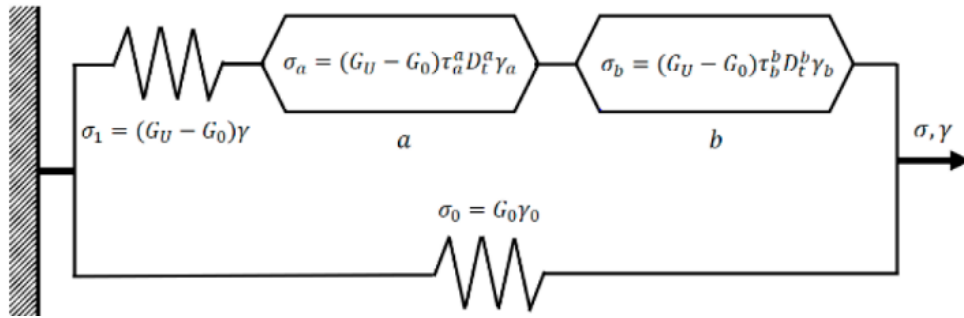


Figura 17- Modelo fraccional de Zener compuesto por dos elementos viscoelásticos y dos elásticos

$\tau_a$  y  $\tau_b$  son los tiempos de relajación,  $G_0$  es el módulo correspondiente al comportamiento del material bajas frecuencias. Mientras que  $G_u$  es el módulo correspondiente al comportamiento del material a alta s frecuencias. Por lo tanto, las ecuaciones diferenciales de orden no entero para el modelo de Zener se pueden escribir como [7]:

$$(G_u - G_0)\gamma = (\sigma - G_0\gamma) + \tau_b^{-b} D_t^b (\sigma - G_0\gamma) + \tau_a^{-a} D_t^{-a} (\sigma - G_0\gamma) \tag{30}$$

De la ecuación anterior y considerando que la muestra está bajo una carga mecánica armónica, el módulo de corte se puede calcular como una función de la frecuencia angular a temperatura constante. Para lo anterior, utilizamos a la transformada de Fourier que se define como:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \tag{31}$$

Y específicamente la transformada de Fourier para la derivada de una función es:

$$\mathcal{F}[f'(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x) e^{-i\omega t} dt \tag{32}$$

Aplicando la transformada de Fourier a la ecuación (30) obtenemos la siguiente expresión:

$$G^*(i\omega) = G' + iG'' = \frac{G_U + G_0[(i\omega\tau_a)^{-a} + (i\omega\tau_b)^{-b}]}{1 + (i\omega\tau_a)^{-a} + (i\omega\tau_b)^{-b}} \quad (33)$$

Al separar los términos real e imaginario, las expresiones para  $G'$  y  $G''$  se dan como:

$$G' = G_0 + \frac{(G_U - G_0)(1 + A_1)}{(1 + A_1)^2 + A_2^2} \quad (34)$$

$$G'' = \frac{(G_0 - G_U)A_2}{(1 + A_1)^2 + A_2^2} \quad (35)$$

Donde:

$$A_1 = [\omega\tau_b]^{-b} \cos\left(b\frac{\pi}{2}\right) + [\omega\tau_a]^{-a} \cos\left(a\frac{\pi}{2}\right) \quad (36)$$

$$A_2 = [\omega\tau_b]^{-b} \sin\left(b\frac{\pi}{2}\right) + [\omega\tau_a]^{-a} \sin\left(a\frac{\pi}{2}\right) \quad (37)$$

Es importante recordar que  $G'$  es el módulo de almacenamiento y  $G''$  es el módulo de pérdida del material.

### 4.3 Evaluación del Modelo de Zener

El modelo descrito en la Ecuación (31) se aplicará a diversos materiales por lo que, con el uso de la herramienta Wolfram Mathematica se generó un archivo para procesar la información, que se muestra en la figura 18. Mediante esta herramienta se ajustan las condiciones de orden no entero caracterizando el comportamiento viscoelástico de materiales sujetos a pruebas descritas en la literatura.

En la figura 19 se muestra el orden del modelo modificado desde un orden cero al orden entero, las curvas corresponden al orden entero y no entero del modelo.

```

Import["MEE MWCNT.csv", "Table"]
(*imports *)
((435800, 7238.872), (436600, 7352.344), (437200, 7427.472), (437600, 7416.672), (438000, 7288.32), (438600, 7263.216), (439200, 7202.8
442400, 7007.616), (442800, 6978.528), (443200, 6931.648), (443800, 6905.528), (444400, 6879.312), (444800, 6832.128), (445400, 6805.
449200, 6594.256), (449800, 6567.08), (450400, 6539.808), (450800, 6509.552), (451200, 6497.28), (451600, 6466.912), (452000, 6436.48
454000, 6682.88), (454400, 6816), (454600, 6909.92), (455000, 7025.2), (455000, 7152.6), (455200, 7246.784), (455200, 7301.408), (455
457000, 7988.36), (457400, 8105.128), (457400, 8233.2), (457800, 8386.896), (458200, 8522.52), (458200, 8669.144), (458600, 8860.152)
461400, 10021.608), (461800, 10307.376), (461800, 10584.456), (462200, 10612.112), (462600, 10843.344), (463000, 11056.44), (463600,
466400, 12555.488), (466800, 12995.712), (467200, 13212.416), (467600, 13522.992), (468800, 13557.696), (469400, 14044.448), (470200
477600, 15702.488), (479000, 15749.52), (481200, 15706.368), (483000, 15108.24), (484800, 14970.624), (486600, 14481.216), (489000, 1
BareLS = Table[{{(428400, 5123.664), (428800, 5145.6), (429000, 5165.16), (429400, 5187.152), (429400, 5204.328), (429800, 5226.34
(*lista *)
(431000, 5361.64), (431400, 5401.128), (431600, 5438.16), (431800, 5492.496), (432200, 5532.16), (432200, 5566.736), (432600
434000, 5711.44), (434000, 5746.16), (434000, 5763.52), (434800, 5791.536), (435000, 5846.4), (435400, 5886.608), (435400,
437200, 6050.848), (437200, 6050.848), (437400, 6106.104), (437400, 6595.992), (437600, 6879.072), (437800, 7320.016), (438
438800, 9565.84), (438800, 9671.152), (439000, 9763.36), (439400, 9877.712), (439600, 9970.128), (439800, 10045.032), (440
441400, 10311.104), (441800, 10461.824), (442200, 10559.736), (442400, 10723.776), (442800, 10946.016), (443200, 11044.5
445000, 11872.6), (445600, 11959.904), (446000, 12131.2), (446200, 12368.664), (446600, 12558.392), (446800, 12724.864),
449000, 13613.68), (449600, 13883.648), (450400, 14088.512), (450800, 14299.376), (451400, 14535.08), (452000, 14789.44)
455600, 15854.88), (456400, 16120.048), (458000, 16396.4), (459000, 16524), (460600, 16728.992), (462000, 16927.68), (46
475400, 15136.736), (478600, 13936.832), (483200, 12002.688), (489200, 9529.616)}];

a = 0.79;
b = 0.24;
Jo = 435 * 103;
Ju = 515 * 103;
fa = 0.001;
fb = 0.002;
f1 =  $\frac{G_u + G_o ((I \omega a T_a)^{-a} + (I \omega a T_b)^{-b})}{1 + (I \omega a T_a)^{-a} + (I \omega a T_b)^{-b}}$ ;

p1 = ParametricPlot[{Re[G1], Im[G1]}, {omega, 10-4, 100}, PlotRange -> All, AspectRatio -> 1 / GoldenRatio, PlotPoints -> 500];
(*gráfico paramétrico parte real parte imaginaria rango de rep... todo cociente de aspecto razón áurea número de puntos en la representac*)
p2 = ParametricPlot[{Re[G1], Im[G1]}, {omega, 100, 106}, PlotRange -> All, AspectRatio -> 1 / GoldenRatio, PlotPoints -> 500];
(*gráfico paramétrico parte real parte imaginaria rango de rep... todo cociente de aspecto razón áurea número de puntos en la representac*)
p3 = ParametricPlot[{Re[G1], Im[G1]}, {omega, 106, 1012}, PlotRange -> All, AspectRatio -> 1 / GoldenRatio];
(*gráfico paramétrico parte real parte imaginaria rango de rep... todo cociente de aspecto razón áurea*)
p4 = ParametricPlot[{Re[G1], Im[G1]}, {omega, 1012, 1015}, PlotRange -> All, AspectRatio -> 1 / GoldenRatio];
(*gráfico paramétrico parte real parte imaginaria rango de rep... todo cociente de aspecto razón áurea*)
p5 = ParametricPlot[{Re[G1], Im[G1]}, {omega, 10-1, 102}, PlotRange -> All, AspectRatio -> 1 / GoldenRatio, PlotPoints -> 500];
(*gráfico paramétrico parte real parte imaginaria rango de rep... todo cociente de aspecto razón áurea número de puntos en la representac*)
d3 = ListPlot[BareLS];
(*representación de lista*)
Show[p1, p2, p3, p4, d3]
(*muestra*)
Show[p5, d3]
(*muestra*)

```

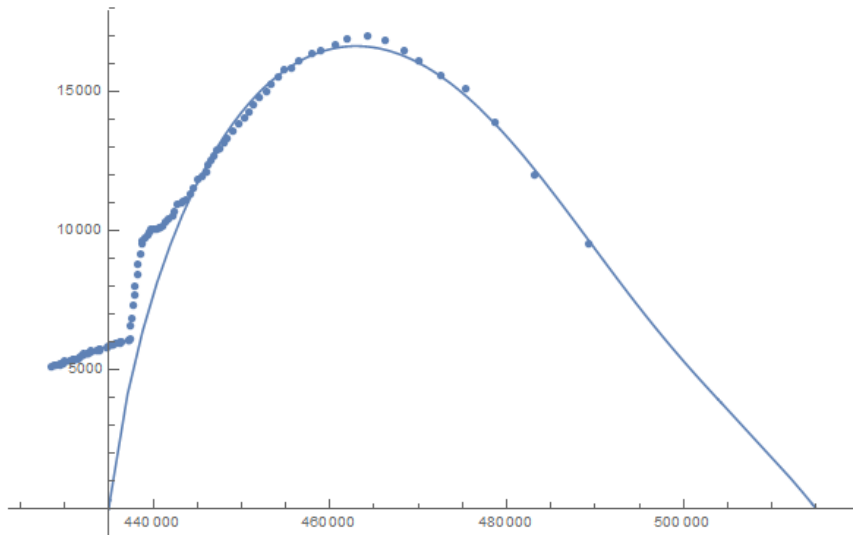


Figura 18 – Archivo de Wolfram Mathematica para aplicar el modelo de orden fraccional

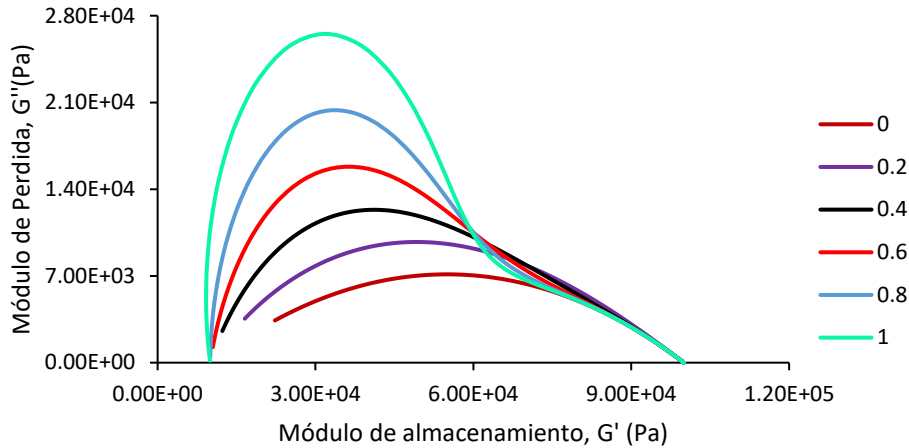


Figura 19 - Influencia del orden fraccional  $b$  (0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1) en el modelo Zener.

#### 4.4 Aplicación del modelo complejo de Zener

Para la validación se importaron los datos experimentales consiguiendo el ajuste del orden del modelo que se aproxime a las condiciones experimentales. Construyendo las curvas teóricas, se realiza una variación del orden fraccional, es importante tener en cuenta la restricción que los valores de  $a$  y  $b$  deben estar entre cero y uno. La figura 19 se muestran las curvas de orden 0 y 1 y las curvas intermedias que corresponden al modelo en sus órdenes fraccionales.

Aplicando el modelo complejo de Zener se ajustaron las curvas en cada caso particular. A continuación, se exponen las curvas correspondientes al modelo complejo de Zener en líneas continuas y en puntos de dispersión los datos experimentales extraídos de las investigaciones abordadas en este trabajo. Los datos experimentales corresponden propiamente al módulo de pérdida y al de almacenamiento.

Las predicciones teóricas de modelo viscoelástico se obtienen siguiendo los datos experimentales recopilados por medio de las investigaciones de autores que estudiaron las propiedades magnetoreológicas de materiales compuestos, en especial es el caso de los materiales con nanotubos de carbono como material reforzante. Los parámetros obtenidos para cada modelo viscoelástico se exponen en la tabla A1, así para cada material citado en este documento.

##### 4.5.1 Aplicación al material del caso A

En la figura 20 se aprecian las curvas ajustadas del modelo zener para los datos experimentales recabados en el trabajo realizado por Volpe V et al, en el cual se pudo observar en la figura 21 se muestra el comportamiento del material mediante el diagrama de Cole-Cole y en este caso se aprecia cómo la adición de partículas de refuerzo permite que el material adquiera una mayor capacidad de absorber



energía y en contraste con los datos experimentales el modelo se ajusta con una buena proximidad, un punto importante a señalar es que las curvas se obtuvieron de un experimento realizado a una muestra de material viscoelástico compuesto que se además se complementó con la orientación de las partículas empleando un campo magnético, así el material obtiene ciertas propiedades anisótropicas con cierto grado de orientación debido al campo magnético. Estas propiedades también se deben al hecho de que las cadenas poliméricas toman orientaciones nuevas alineadas al campo magnético aplicado. Esta información es de interés para considerar en la mejora del modelo Zener. [28]

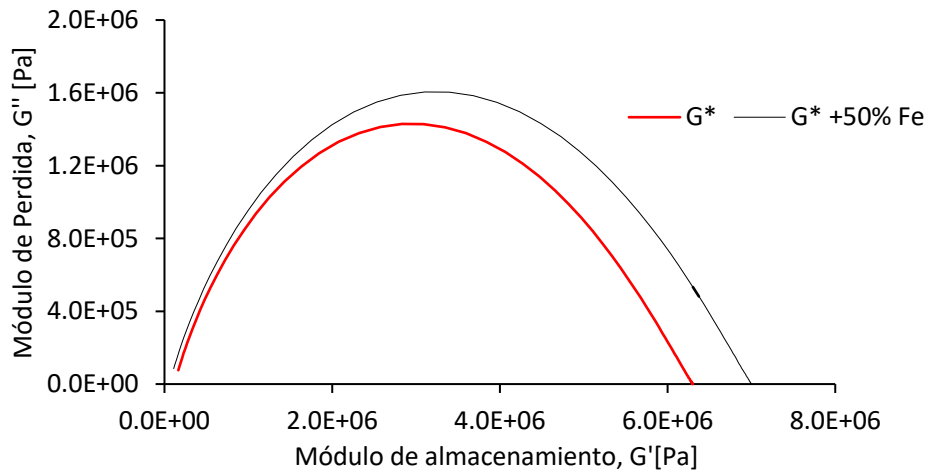


Figura 20 - Modelo complejo e Zener, ajuste para las pruebas experimentales encontradas por [28].

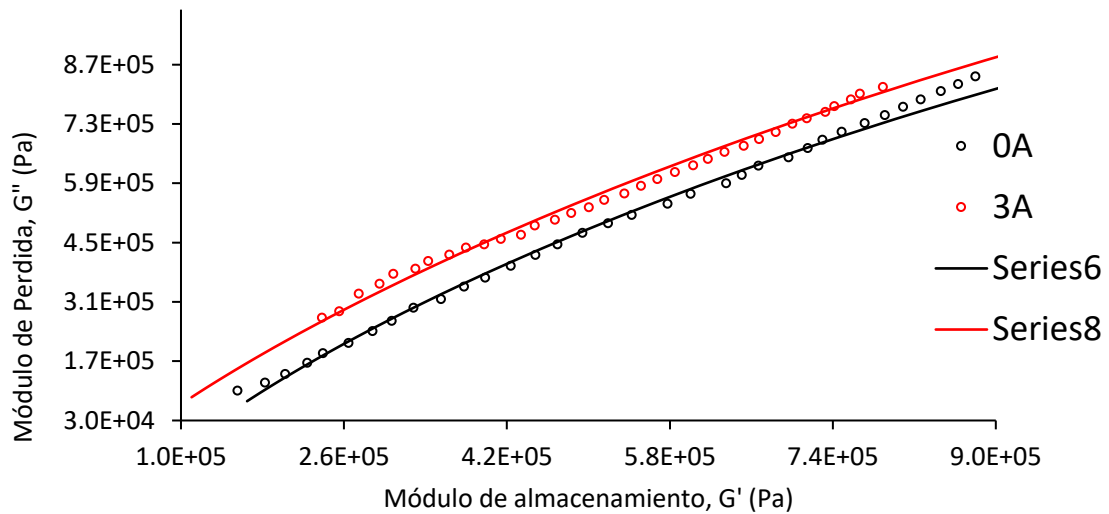


Figura 21 - Aplicación del modelo complejo de Zener en líneas continuas en contraste con los datos experimentales de [28].

#### 4.5.2 Aplicación al material del caso B

La figura 22 muestra los datos experimentales del elastómero magnetoreológico sujeto a diferentes campos magnéticos. Se muestran los valores experimentales con puntos y el modelo de orden fraccional con líneas continuas para cada una de las muestras de material. En la figura 23 se aprecia el diagrama de Cole Cole completo y se puede observar con claridad cómo a medida que se incrementa el campo magnético tanto la rigidez como la capacidad de disipar energía se incrementan en el material. Es importante observar la cercanía que el modelo tiene con respecto a los datos experimentales. Abdul S, et al, investigan las características reológicas un Elastómero Magnetoreológico (MRE), con partículas corroídas de hierro carbonilo. Como una forma de medir la relación de las partículas de hierro carbonilo en condiciones ambientales. Las interacciones de las partículas con el oxígeno reducen sus propiedades magnéticas. Los resultados del módulo de almacenamiento  $G'$  (Storage Modulus) y factor de pérdida  $G''$  (Loss Factor) se obtuvieron de las pruebas de frecuencia a diferentes intensidades de campo magnético variando las corrientes de 0, 1, 2, 3 A, los datos del investigador se incluyen en la tabla B2 del apéndice B. [33]

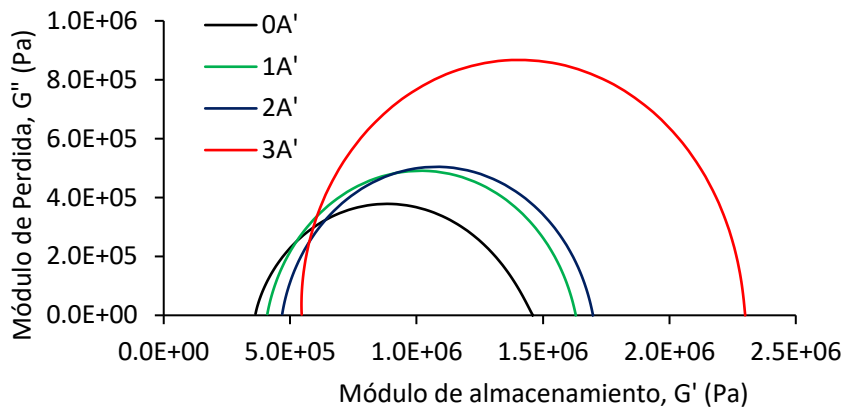


Figura 22 - Modelo complejo e Zener, ajuste para las pruebas experimentales encontradas por [33].

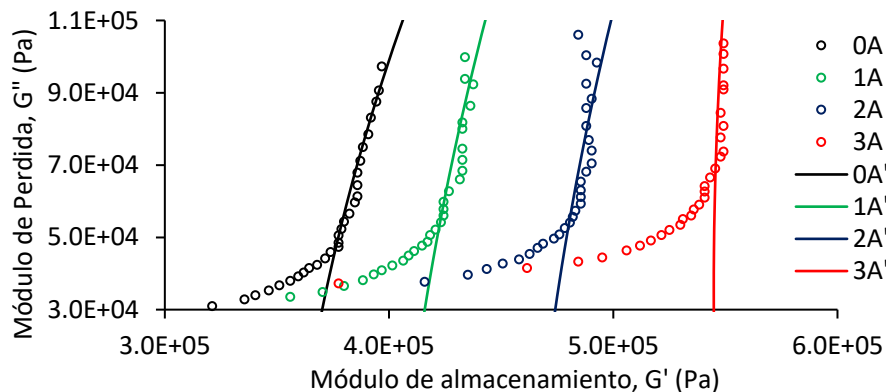


Figura 23 - Aplicación del modelo complejo de Zener en líneas continuas en contraste con los datos experimentales de [33].

### 4.5.3 Aplicación al material del caso C

E. Wittenberg et al, estudiaron las propiedades mecánicas que dependientes de la temperatura debido a que el enlace de hidrogeno tiene un marcado impacto en las propiedades del material ya que facilita la formación de una red de polímero supramolecular, los datos de  $G'$  y  $G''$  se incluyen en la tabla B3. En la figura 24 se muestran los datos experimentales de mediante los puntos y la modelación matemática en líneas continuas. En este caso, se puede apreciar el cambio radical en el comportamiento del material y la forma en que el modelo fraccional se adapta a la respuesta del material. En la figura 25 se presenta el diagrama de Cole-Cole completo donde se observa la diferencia drástica en la rigidez del material para cuando el material se modifica a  $90^{\circ}\text{C}$  a diferencia de los otros dos materiales. Los valores del orden fraccional permiten un buen ajuste con el comportamiento del material [30].

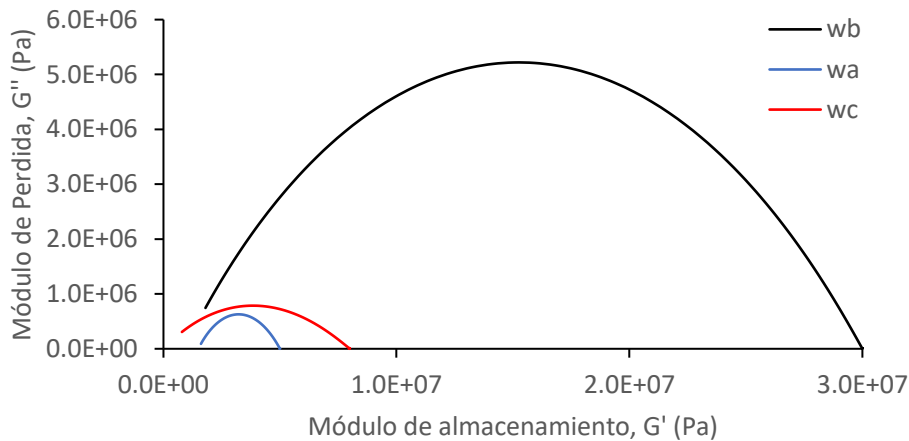


Figura 24 - Modelo complejo e Zener, ajuste para las pruebas experimentales encontradas por [30].

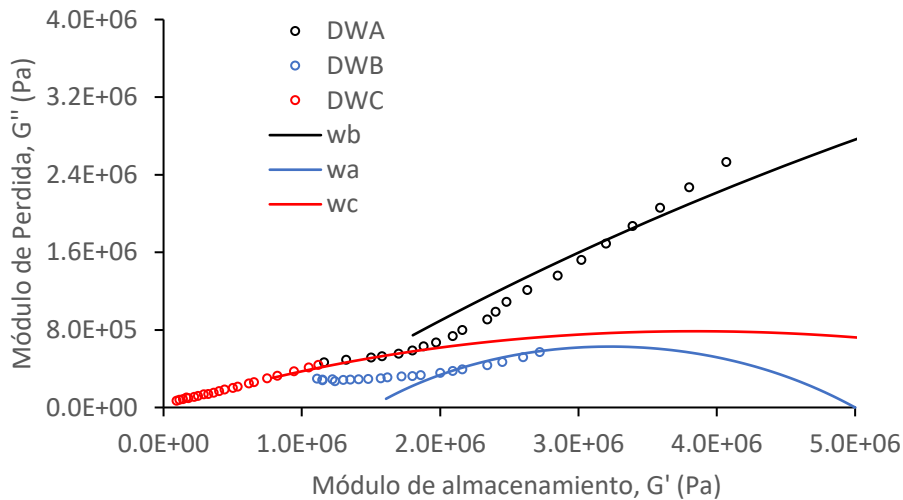


Figura 25 - Aplicación del modelo complejo de Zener en líneas continuas en contraste con los datos experimentales de [30].

#### 4.5.4 Aplicación al material del caso D

Por otro lado, en la figura 26 se muestran los datos experimentales y el modelo matemático para los datos de. En este caso dos materiales diferentes, uno con distribución isotrópica de las partículas magnéticas y otro con una dispersión isotrópica de las partículas de refuerzo. Ambos materiales fueron expuestos a un campo magnético de 600mT. Se puede apreciar en el diagrama completo de Cole-Cole en la figura 27 el incremento en la rigidez cuando el campo magnético es aplicado. Ahmad M et al, presentan un enfoque diseñando un molde de circuito cerrado, que guía el campo magnético dentro de la cámara de moldeo para fortalecer el flujo magnético durante el proceso de curado con la ayuda de plastificantes de aceite de silicona (SO) que sirve para ablandar la matriz. Sin embargo, al agregar 5% de silicona, la resistencia disminuyó y disminuyó más al agregar 10% y 15%, en probetas isotrópicas y anisotrópicas con un campo magnético de 0 y 600 mT. Aunque la resistencia disminuyó el material se tornó más flexible y suave útil en aplicaciones que así lo requieren [31].

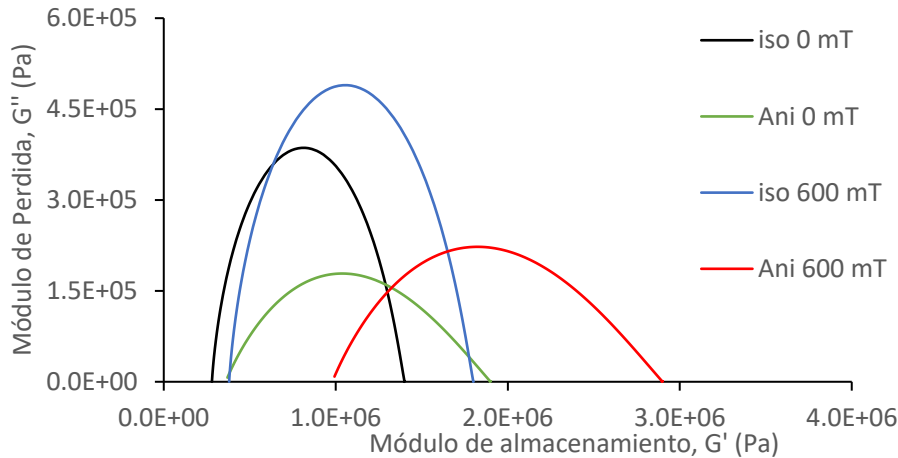


Figura 26 - Modelo complejo e Zener, ajuste para las pruebas experimentales encontradas por [31]

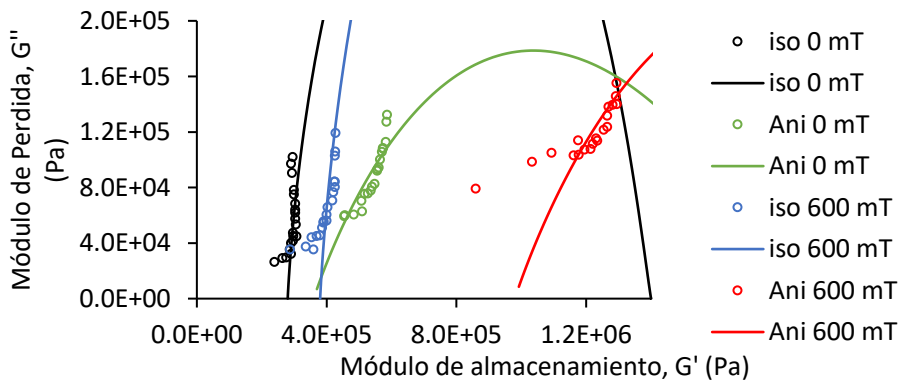


Figura 27 - Modelo complejo e Zener, ajuste para las pruebas experimentales encontradas por [31]

#### **4.5.5 Aplicación al material del caso E**

Aplicando el modelo complejo de Zener se ajustaron las curvas en cada caso particular. En las siguientes graficas se muestra una mejor consistencia del modelo Zener a las pruebas de almacenamiento y disipación, se observa que los experimentos permiten un incremento en las propiedades al aplicar un campo magnético. El uso de nanotubos de carbono como relleno generó un incremento por la mezcla de este en diferentes variantes, resaltando la importancia de modelar el comportamiento viscoelastico ya que además de los cambios en las propiedades que se generan con el campo magnético, también los nanotubos de carbono tienen propiedades semiconductoras que deben ser consideradas para estas pruebas.

S. Aziz et al, empleó una matriz de caucho natural (SMR-20) sintetizado por Malaysia Rubber Board. Las partículas de carbonil hierro (CIP) se emplearon con un diámetro medio de 6 nm previsto por (BASF, Alemania). Se fusionaron nanotubos de carbono con paredes múltiples carboxilados y nanotubos de carbono con paredes múltiples hidroxilados. Provisos por Shenzhen Nanotech Port Co. Ltd, China. Utilizó aceite de palma epoxidado (EPO) como medio para dispersar CIP y MWCNT. óxido de zinc (ZnO) y ácido esteárico, como activadores, mientras que como agente vulcanizante se y acelerador utilizó azufre y N-ciclohexil benzoatiazol-2-sulfenamida (CBS). Santoflex 13 fue utilizado como estabilizador de polímero sintético y antiozonante. El 0,1% de MWCNT se mezcló con 10 partes de EPO (Rovpro 5301; Rovski Industries Sdn Bhd, Malasia) para romper las interacciones de Van der Waals se utilizó un pulso ultrasónico de cuerno durante 15 min con 10 s (FB 705; Fister Scientific Sdn Bhd, Malasia) [35].

S. Aziz et al, determino que los nanotubos de carbono modifican las propiedades morfológicas, termodinámicas y reológicas. Por lo que se muestra en las pruebas experimentales es el aumento de estas propiedades. Los elastómeros se someten a un rango de frecuencias aplicando campos magnéticos, observando una variedad de propiedades del elastómero magnetoreológico que se adaptan a un adecuado número de aplicaciones. La adición de los nanotubos de paredes múltiples es de igual forma un proceso que puede mejorarse. Empleando nanotubos con hidroxilo (-OH) y nanotubos con carboxilato (-COOH) [34].

Al aplicar el modelo de Zener se puede observar que las propiedades mecánicas del material se mejoran significativamente. Por ejemplo, en la figura 25 se observa por medio del modelo como el material se comporta con propiedades más elevadas a frecuencias bajas, sin aplicar campo magnético. Sin embargo, en la figura 31 se observa que al aplicar el campo magnético de 186 mT los materiales con hidroxilo y carboxilato alcanzan mayores niveles de módulo de almacenamiento y pérdida.

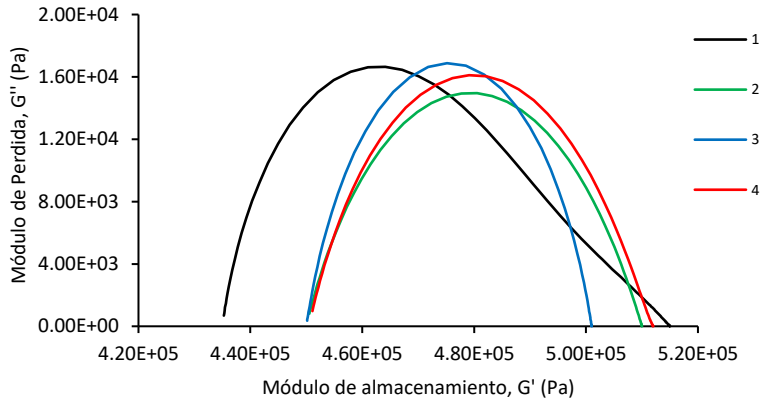


Figura 28- Modelo complejo e Zener, ajuste para las pruebas experimentales encontradas por [34]. Pruebas realizadas bajo campo magnético de [ 0 mT].

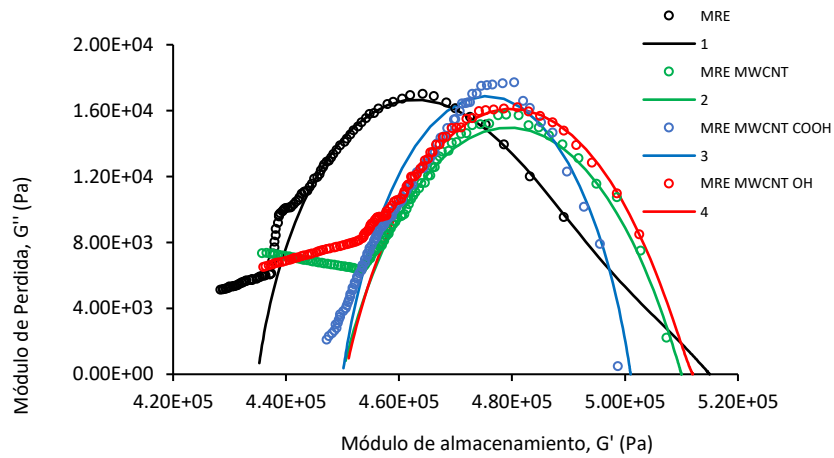


Figura 29 - Aplicación del modelo complejo de Zener en líneas continuas en contraste con los datos experimentales de [34]. Pruebas realizadas bajo campo magnético de [ 0 mT].

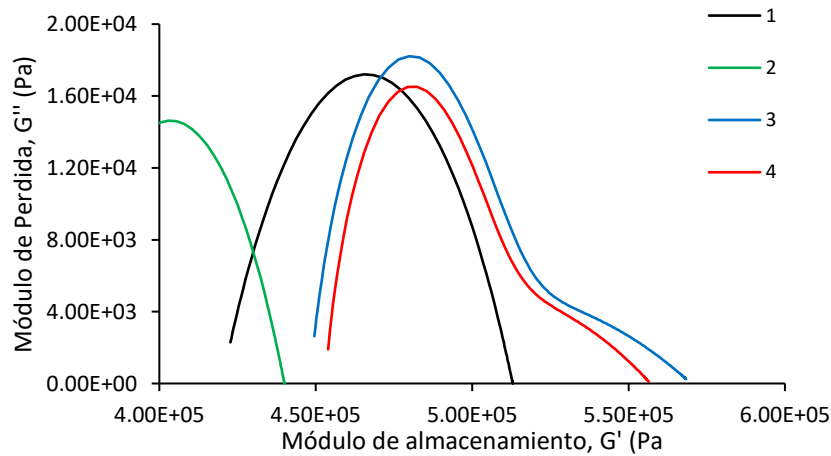


Figura 30 - Modelo complejo e Zener, ajuste para las pruebas experimentales encontradas por [34]. Pruebas realizadas bajo campo magnético de [ 186 mT].

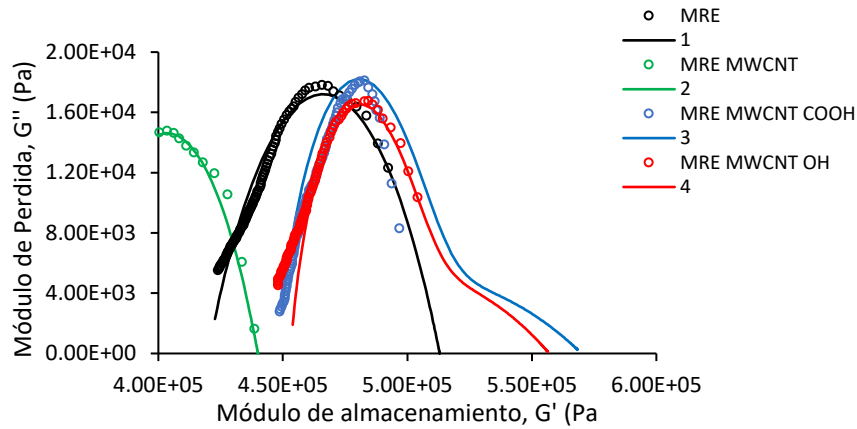


Figura 31 – Aplicación del modelo complejo de Zener en líneas continuas en contraste con los datos experimentales de [34]. Pruebas realizadas bajo campo magnético de [ 186 mT].

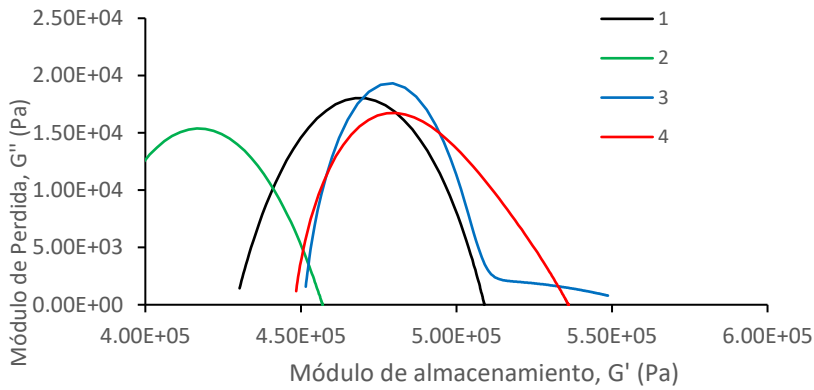


Figura 32 - Modelo complejo e Zener, ajuste para las pruebas experimentales encontradas por [34]. Pruebas realizadas bajo campo magnético de [ 336 mT].

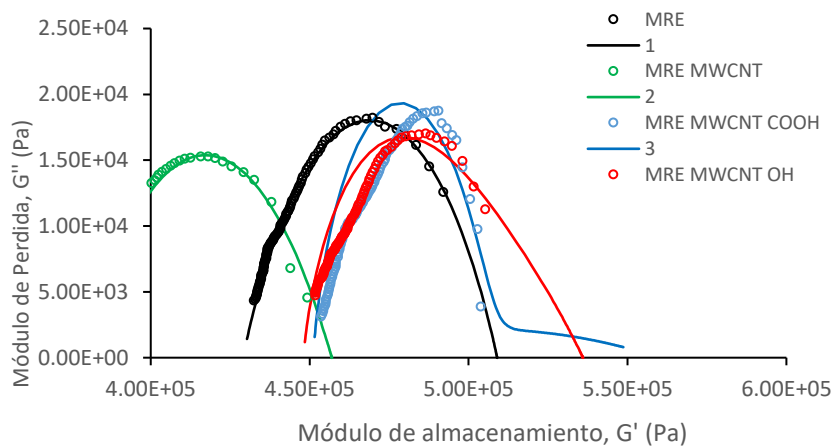


Figura 33 - Aplicación del modelo complejo de Zener en líneas continuas en contraste con los datos experimentales de [34]. Pruebas realizadas bajo campo magnético de [ 336 mT].

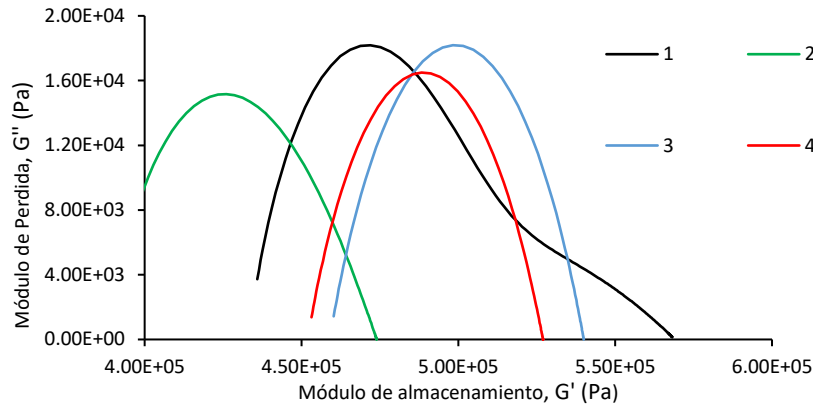


Figura 34 – Modelo complejo e Zener, ajuste para las pruebas experimentales encontradas por [34]. Pruebas realizadas bajo campo magnético de [ 508 mT].

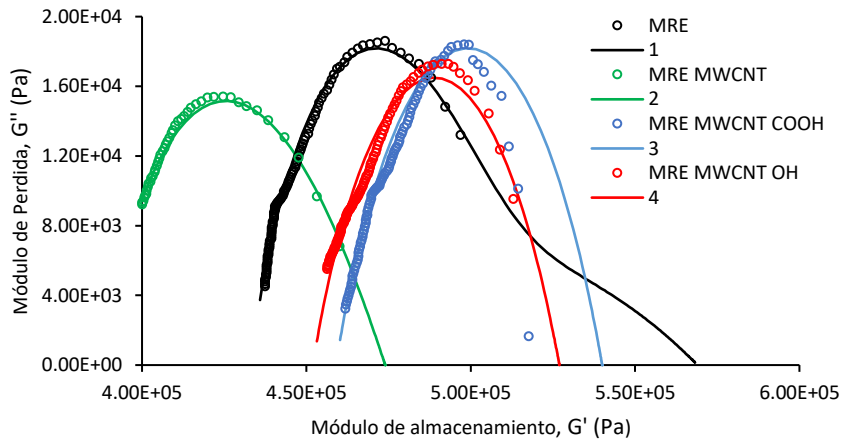


Figura 35 - Aplicación del modelo complejo de Zener en líneas continuas en contraste con los datos experimentales de [34]. Pruebas realizadas bajo campo magnético de [ 508 mT].

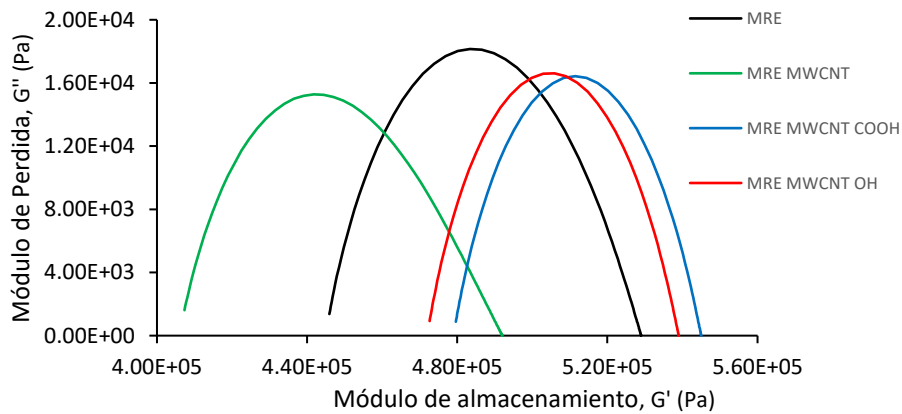


Figura 36 - Modelo complejo de Zener, ajuste para las pruebas experimentales encontradas por [34]. Pruebas realizadas bajo campo magnético de [ 747 mT].



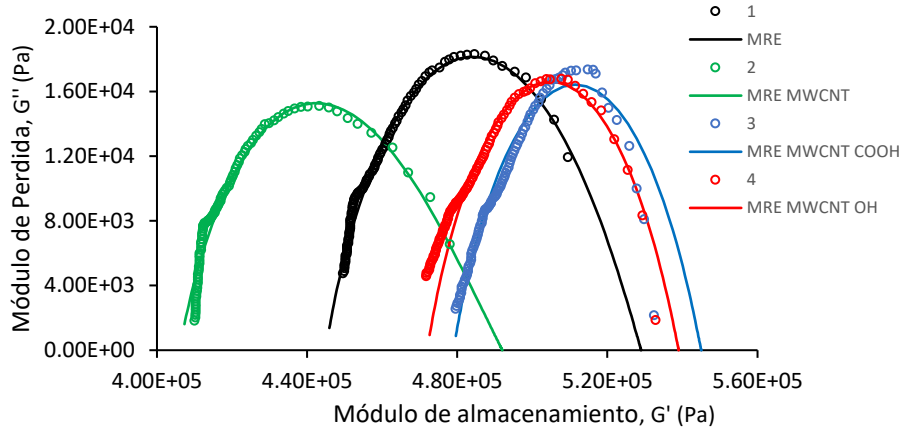


Figura 37 - Aplicación del modelo complejo de Zener en líneas continuas en contraste con los datos experimentales de [34]. Pruebas realizadas bajo campo magnético de [ 747 mT].

**4.5.6 Aplicación al material del caso F**

Aziz S. et al (2017) polimerizó como matriz el caucho natural (NR) fabricado por Malaysia Rubber Board. adicionando partículas magnéticas de carbonil hierro (tipo OM) con un diámetro medio de 6 μm compradas en BASF de Alemania. Tres tipos MWCNT, es decir, MWCNT prístino, carboxilado (COOH-MWCNT) y hidroxilados (OH-MWCNT) se utilizaron como aditivo que se obtuvo del puerto de Shenzhen Nanotech Co. Ltd, China. El diámetro exterior de 10-20 nm y la longitud de la partícula entre 10-30 μm con una pureza el nivel de MWCNT utilizado es del 95%. El agente vulcanizante y el plastificante fueron azufrados y epoxidados. aceite de palma (EPO), respectivamente. Mientras tanto, el óxido de zinc (ZnO) y el ácido esteárico se utilizaron como activadores.

La N ciclohexilbenzotiazol-2-sulfenamida (CBS) utilizada como acelerador. Santoflex 13 utilizado como antiozonante y como estabilizador de polímero sintético [35].

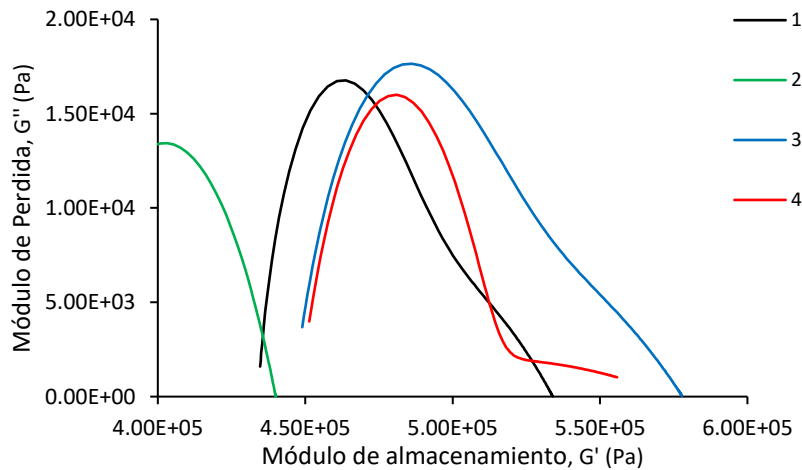


Figura 38 - Modelo complejo de Zener, ajuste para las pruebas experimentales encontradas por [35]. Pruebas realizadas bajo campo magnético de [ 0 mT].

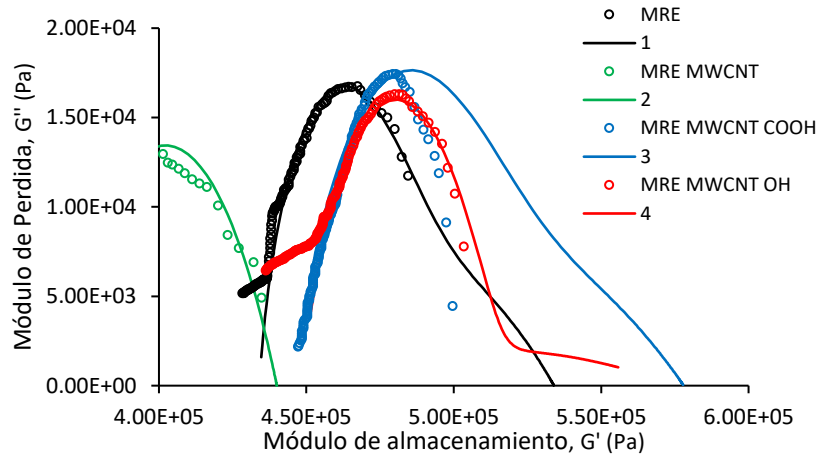


Figura 39 - Aplicación del modelo complejo de Zener en líneas continuas en contraste con los datos experimentales de [35]. Pruebas realizadas bajo campo magnético de [ 0 mT].

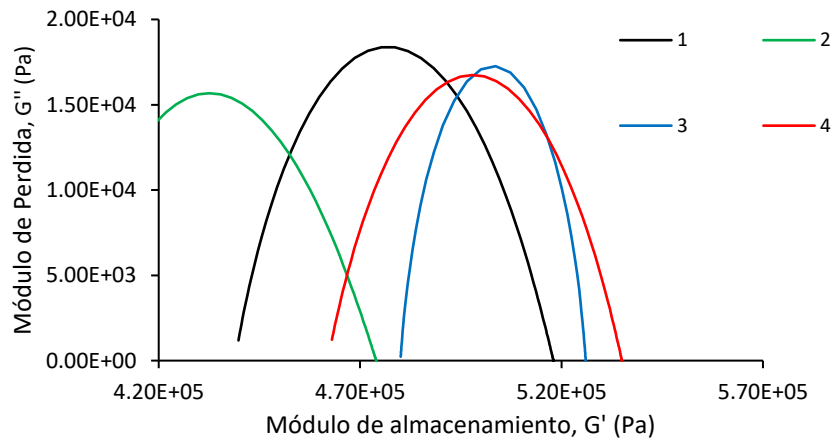


Figura 40 - Modelo complejo de Zener, ajuste para las pruebas experimentales encontradas por [35]. Pruebas realizadas bajo campo magnético de [ 643 mT].

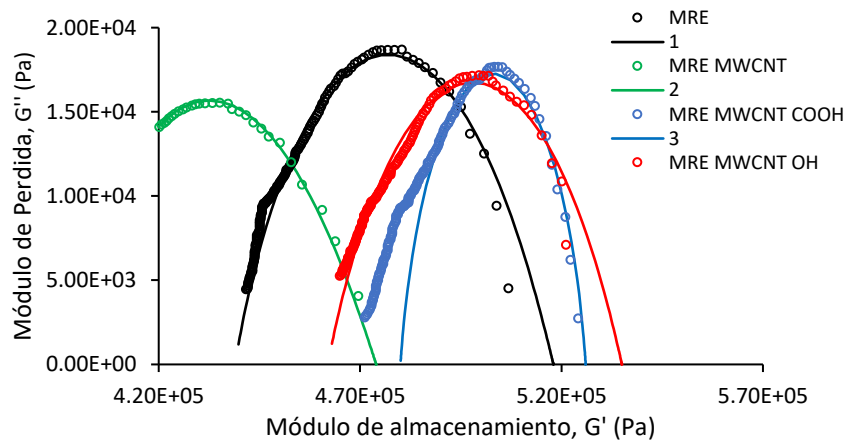


Figura 41 - Aplicación del modelo complejo de Zener en líneas continuas en contraste con los datos experimentales de [35]. Pruebas realizadas bajo campo magnético de [ 643 mT].

#### 4.5.7 Aplicación al material del caso G

Hemmatian. et al, sintetizó su material a partir de un elastómero con partículas ferromagnéticas, Las muestras de MRE de este trabajo se fabricaron en el laboratorio mezclando, las partículas ferromagnéticas de tamaño micrométrico en la matriz de elastómero a temperatura ambiente. La matriz se eligió como caucho de silicona (Ecoflex0020 - Smooth on), que se considera muy adecuada para una amplia gama de temperaturas de trabajo.

El CIP (partículas de carbonil hierro por sus siglas en inglés) esférico de grado SQ, fabricado por BASF Corporation, se utilizó como partículas ferromagnéticas. Este tipo de CIP tiene una alta pureza de Fe (99,5%) con un tamaño de partícula que varía de 3,9 a 5,0  $\mu\text{m}$ . Las muestras de MRE se fabricaron considerando una fracción de volumen del 25% del CIP. La contracción del caucho de silicona se consideró insignificante. El volumen requerido de caucho de silicona en la mezcla se extrajo usando una jeringa, mientras que la cantidad requerida de CIP se pesó ( $\rho = 7874 \text{ kg.m}^{-3}$ ) de acuerdo con su fracción de volumen.

A continuación, los componentes se mezclaron a fondo durante aproximadamente 5 min. Posteriormente, la mezcla se desgasificó colocándola en una cámara de vacío a una presión de 28 in-Hg durante otros 5 min. Posteriormente, la mezcla se vertió en un molde de plexiglás transparente de 80 mm de diámetro y 2 mm de espesor y se dejó curar a temperatura ambiente durante 24 h. Se cortaron muestras de 20 mm de diámetro del MRE fabricado utilizando un punzón, que podría acomodarse en el magnetorreómetro.

Hemmatian. et al, también fabricó una muestra de caucho de silicona sin relleno utilizando el mismo compuesto de matriz (Ecoflex0020 - Smooth on). El proceso de fabricación fue idéntico al descrito para el MRE con la excepción del contenido CIP. Se cortaron muestras de caucho de silicona (diámetro = 20 mm; espesor = 2 mm) para caracterizar el efecto de la temperatura sobre las propiedades viscoelásticas, lo que sirvió como referencia para el estudio de dependencia de la temperatura del MRE [36].

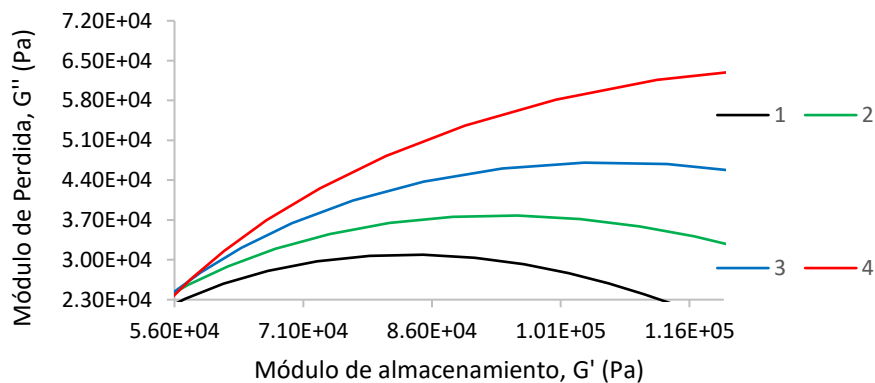


Figura 42 - Modelo complejo e Zener, ajuste para las pruebas experimentales encontradas por [36]

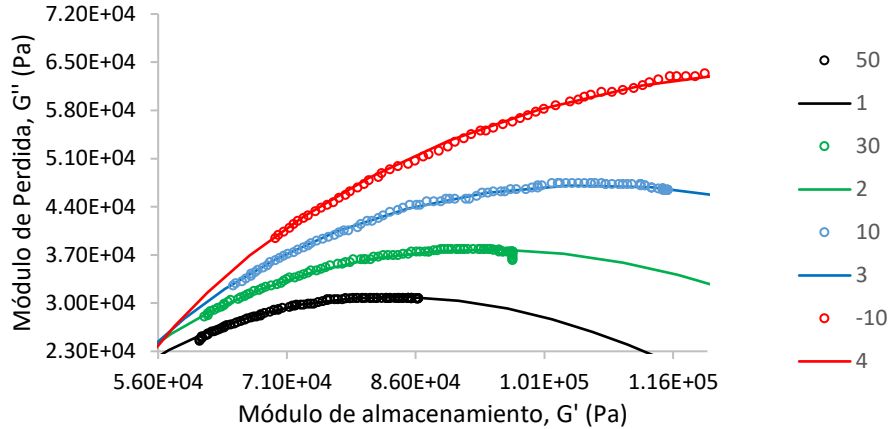


Figura 43 - Aplicación del modelo complejo de Zener en líneas continuas en contraste con los datos experimentales de [36].

#### 4.5.8 Aplicación al material del caso H

Zhu G. et al, empleó muestras de MRE anisotrópicas compuestas por caucho de silicona (Wacker Chemie AG, Alemania) y partículas de hierro de tamaño micrométrico (Sigma-Aldrich, EE. UU.). Luego, añadió los polvos de carbonil hierro con un tamaño de hasta  $9 \mu\text{m}$  con una concentración de volumen de partículas del 30%. , que se considera capaz de generar el máximo efecto MR; en segundo lugar, la mezcla se mezcló a fondo y se colocó en una cámara de vacío durante 20 minutos para eliminar las burbujas de aire atrapadas en el interior; finalmente la mezcla se colocó en moldes cuadrados de aluminio de  $21,8 \times 21,8 \times 6,5 \text{ mm}$  y se curó durante 16 horas a temperatura ambiente para solidificar con un campo magnético externo de 290 mT producido por los imanes permanentes de neodimio de grado cilíndrico N42 (E-imanes, Reino Unido) [37].

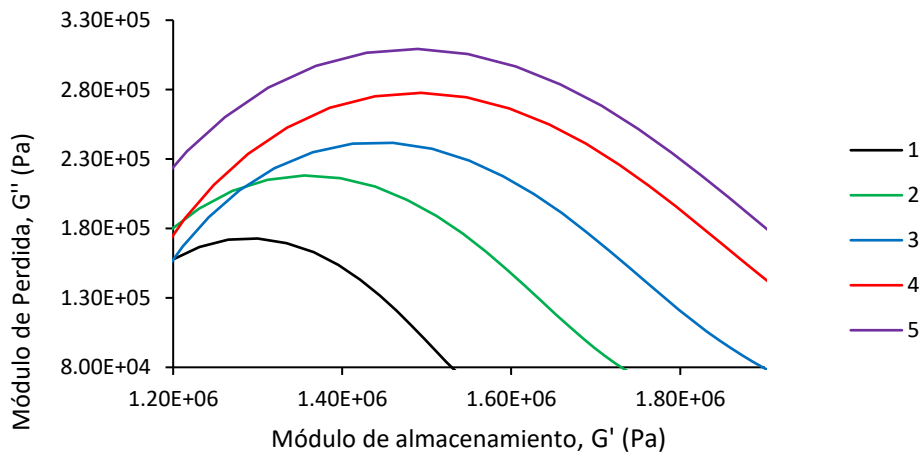


Figura 44 - Modelo complejo e Zener, ajuste para las pruebas experimentales encontradas por [37].

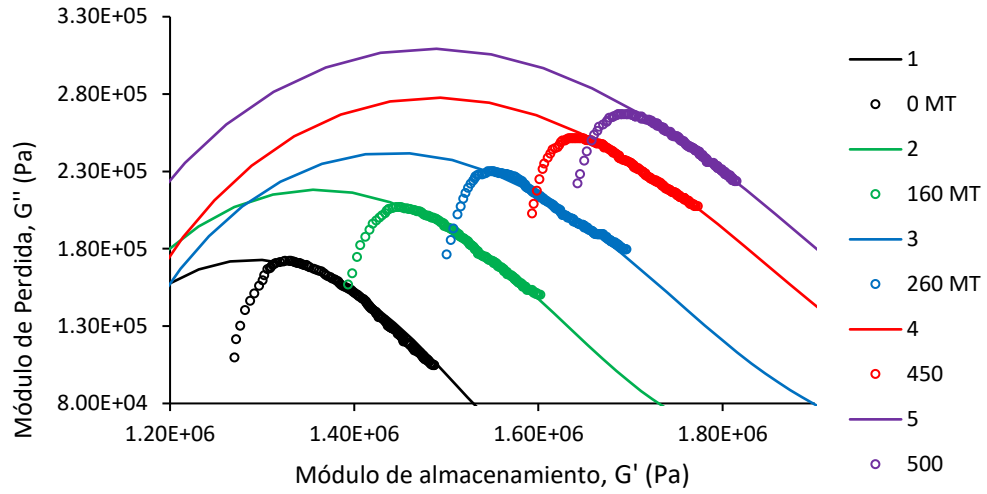


Figura 45 - Aplicación del modelo complejo de Zener en líneas continuas en contraste con los datos experimentales de [37].

## Conclusiones

El comportamiento viscoelástico de un elastómero magnetoreológico se puede describir con el modelo fraccional propuesto, incluso en materiales que fueron preparados con diferentes métodos de manufactura o con diferente tipo de partículas de refuerzo. Los órdenes fraccionales del modelo describen el comportamiento molecular de material a bajas y a altas frecuencias, lo que le otorga una mayor versatilidad. El módulo de almacenamiento  $G'$  y el módulo de pérdida  $G''$  de los materiales se obtiene a partir de mediciones reológicas y a partir de esta información ha sido posible ajustar el modelo matemático a los datos experimentales y obtener información adicional del comportamiento molecular de los materiales compuestos. El apéndice A muestra los valores de cada uno de los parámetros del modelo que corresponden a cada uno de los materiales considerados. Comparando estos hallazgos con los cuatro planteamientos expuestos en este trabajo, se llegó a un grado de aproximación que dependerá del número de muestras obtenidas para lograr un mejor ajuste de las aproximaciones del modelo de Zener.

Este análisis se realizó considerando la aplicación de un campo magnético que normalmente implica una alimentación eléctrica de hasta 5 Amperes lo que genera una intensidad de flujo magnético de un Tesla. Los cambios en las propiedades reológicas del material hacen que el modelado del comportamiento viscoelástico resulte útil para la predicción del comportamiento de estos componentes en situaciones reales de operación. Adicionalmente, pudo comprobarse que la adición de nanotubos de carbono (MWCNT COOH y los MWCNT OH) en los compuestos magnetoreológicos juegan un papel importante en la mejora de las propiedades mecánicas magnéticas y reológicas.

## Referencias

- [1] T. Kikuchi, Y. Kobayashi, Mika Kawai and Tetsu Mitsumata, «Elastic Properties of Magnetorheological Elastomers,» *International Journal of Molecular Science*, vol. 19, n° 3045, pp. 0-9, 2018.
- [2] Muntaz Hana Ahmad Khairi, Abdul Yasser Abd Fatah, Saiful Amri Mazlan, U. Ubaidillah, Nur Azmah Nordin, Nik Intan Nik Ismail, Seung Bok Choi, Siti Aishah Abdul Aziz, «Enhancement of Particle Alignment Using Silicone Oil Plasticizer and Its Effect on the Field-Dependent Properties of Magnetorheological Elastomers,» *International Journal of Molecular Science*, vol. 20, n° 4085, pp. 1-15, 2019.
- [3] Umanath R. Poojary, K. V. Gangadharan, «Integer and Fractional Order Based Viscoelastic Constitutive Modeling to Predict the Frequency and Magnetic Field Induced Properties of Magnetorheological Elastomer,» *Journal of Vibration and Acoustics*, vol. 140, n° 041007-1, pp. 1-15, 2018.
- [4] A. Maiti, W. Small, R. H. Gee, T. H. Weisgraber, S. C. Chinn, T. S. Wilson, R. S. Maxwell, «Mullins effect in a filled elastomer under uniaxial tension,» *American Physical Society*, vol. 89, n° 012602, pp. 1539-3755, 2014.
- [5] A.B. Chai, E. Verron, A. Andriyana, M.R. Johan, «Mullins effect in swollen rubber: Experimental investigation and constitutive modelling,» *Elsevier Ltd*, vol. 32, p. 748–759, 2013.
- [6] René K. Córdova, Alex Elías-Zúñiga, Luis E. Elizalde, Héctor R. Siller, José Antonio Sánchez, Ciro A. Rodríguez, Wendy Ortega, «Polymeric Materials Reinforced with Multiwall Carbon Nanotubes: A Constitutive Material Model,» *OPEN ACCES MATERIALS*, vol. 6, pp. 2873-2891, 2013.
- [7] Puente-Córdova J, Reyes Melo M, Palacios-Pineda L, Martínez-Perales I, «Fabrication and Characterization of Isotropic and Anisotropic Magnetorheological Elastomers, Based on Silicone Rubber and Carbonyl Iron Microparticles,» *polymers*, pp. 1-13, 2018.
- [8] C.H. Edwards, Jr. David E, *Calculo diferencial e integral*, Naucalpan de Juárez. Edo de México: Pearson Educación, 1997.
- [9] Antón, Lombardero Ozores, *Calculo fraccionario y dinamica newtoniana*, Santiago de Compostela, España: G.I.E Pensamiento Matemático, 2014.

- [10] Bagley, Ronald L., «A Different Approach to the Analisis of Viscoelastically Damped Structures,» *AIAA JOURNAL*, pp. 741-748, 1983.
- [11] Tuttanan, Boonrod, «Legendre wavelets approach for numerical solutions of distributed order fractional differential equations,» *ELSEVIER*, pp. 350-364, 2019.
- [12] D. WU, Kenneth M. Liechti, «Multiaxial and Time Dependent Behavior of a Filled Rubber,» *Mechanics of Time-Dependent Materials*, pp. 293-331, 2000.
- [13] J.E Palomares, M. Rodriguez, J.G. Castro, «Determinación del orden fraccional en el modelo Zener paracaracterizar los efectos biomecánicos ocasionados por el flujosanguíneo,» *ELSEVIER*, pp. 10-17, 2017.
- [14] V.Fombuena, «Utilidad de los modelos de viscoelasticidad en el aprendizaje de la ingeniería de materiales poliméricos,» *MSEL*, pp. 137-148, 2017.
- [15] Chai, A.B., «Mullins effect in swollen rubber: Experimental investigation,» *ELSEVIER*, pp. 748-759, 2013.
- [16] Zhou, X.Q., «Research and applications of viscoelastic vibration damping materials: A review,» *ELSEVIER*, pp. 460-480, 2015.
- [17] Nadzharyan, T.A., «A fractional calculus approach to modeling rheological behavior of soft,» *ELSEVIER*, pp. 179-188, 2016.
- [18] Mostafa Asadi Khanouki, Ramin Sedaghati, «Experimental characterization and microscale modeling of isotropic and anisotropic magnetorheological elastomers,» *ELSEVIER*, p. B 176, 2019.
- [19] Muntaz Hana Ahmad Khairi, Abdul Yasser Abd Fatah, Saiful Amri Mazlan, U. Ubaidillah, Nur Azmah Nordin, , Nik Intan Nik Ismai, Seung Bok Choi, Siti Aishah Abdul Aziz, «Enhancement of Particle Alignment Using Silicone Oil Plasticizer and Its Effects on the Field-Dependent Properties of Magnetorheological Elastomers,» *International Journal of Molecular Siences*, vol. XX, nº 4085, pp. 2-15, 2019.
- [20] Poojary, Umanath R., «Integer and Fractional Order-Based Viscoelastic Constitutive Modeling to Predict the Frequency and Magnetic Field-Induced Properties of Magnetorheological Elastomer,» *Journal of Vibration and Acoustics*, pp. 50-62, 2018.
- [21] Pan, Xiao-Dong, «Impact of reinforcing filler on the dynamic,» *Rheol Acta*, vol. I, nº 44, pp. 379-395, 2005.



- [22] Tongefi Tian, Masami N., «Fabrication and characterisation of anisotropic magnetorheological elastomer with 45° iron particle alignment at various silicone oil concentrations,» *Intelligent Material Systems and Structures*, vol. 2, n° 29, pp. 151-159, 2017.
- [23] Askeland, Donald R., Ciencia e ingeniería de materiales 6ta ed., México DF: CENAGAGE Learning, 2012.
- [24] Branes, H.A; J.F, Hutton., «An introduction to rheology,» *ELSEVIER*, pp. 5-6, 1989.
- [25] Lin, Yn-Hawang, Polimer Viscoelasticity, Hackensack NJ: world Scientific, 2011.
- [26] Meyers, Marc; Chawla, Krishan, Mechanical Behavior of Materials, New York: Cambridge University Press, 2009.
- [27] Guía-Calderón M, Rosales-García J, Guzman-Cabrera R, González-Parada A, Álvarez-Jaime j, «El cálculo diferencial e integral fraccionario y sus aplicaciones,» *ACTA UNIVERSITARIA ;Multidisciplinary Scientific Journal*, pp. 20-27, 2015.
- [28] V Volpe, D'Auria M, Sorrentino L, Davino D, Pantani R, «Injection molding of magneto-sensitive polymer composites,» *ELSEVIER*, vol. 15, n° 280-287, p. 8, 2018.
- [29] Aishah S, Amri S, Azmah N, Azlin Nor, Ubaidillah U, Choi S, Mohamad N, «Material Characterization of Magnetorheological Elastomers with Corroded Carbonyl Iron Particles: Morphological Images and Field-dependent Viscoelastic Properties,» *International Journal of Molecular Sciences*, vol. 20, p. 20, 2019.
- [30] Wittenberg E, Meyer A, Eggers S, Abetz V, «Hydrogen bonding and thermoplastic elastomers a nice couple with temperature-adjustable mechanical properties,» *Royal Society of Chemistry*, vol. 14, n° 2701-2711, p. 11, 2018.
- [31] Ahmad M, Abd A, Amri S, Udaisillah U, Azmah N, Nik N, Bok S, Abdul A, «Enhancement of Particle Alignment Using Silicone Oil Plasticizer and Its E Properties of Magnetorheological Elastomers,» *International Journal of Molecular Sciences*, vol. 20, n° 4085, p. 15, 2019.
- [32] Valentina Volpe, Marco D'Auria, Luigi Sorrentino, Daniele Davino, Roberto Pantani, «Injection molding of magneto-sensitive polymer composites,» *ELSEVIER*, vol. 15, pp. 280-287, 2018.

- [33] Abdul Aziz, Siti A.B.; Amri Mazlan, Saiful; Azmah Nordin, Nur; Abd Rahman, Nor A.N.; Ubaidillah, U; Cho, Seung-Bok; Mohamad, Norzilawati, «Material Characterization of Magnetorheological Elastomers with Corroded Carbonyl Iron Particles: Morphological Images and Field-dependent Viscoelastic Properties,» *Molecular Science*, vol. 2019, nº 20, p. 3311, 2019.
- [34] Siti Aishah Abdul Aziz, Saiful Amri Mazlan, Nik I Nik Ismail, Seung-Bok Choi, Ubaidillah, and Nurul Azhani Binti Yunus., «An enhancement of mechanical and rheological properties of magnetorheological elastomer with multiwall carbon nanotubes,» *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, vol. 28, nº 20, p. 3127–3138, 2017.
- [35] S A A Aziz, SA Mazlan, N I Nik Ismail, Ubaidillah, MHA Khairi, NA Yunus, «Rheological properties of carbon nanotubes-reinforced magnetorheological elastomer,» *ICSAS*, vol. 795, nº 012074, pp. 1-6, 2017.
- [36] Masoud Hemmatian, Ramin Sedaghati, Subhash Rakheja, «Characterization and modeling of temperature effect on the shear mode properties of magnetorheological elastomers,» *Smart Materials and Structures*, vol. 29, nº 115001, pp. 1-19, 2020.
- [37] G H Zhu, Z G Li, Y P Xiong, L Xiao, M Li, «Dynamic Mechanical Properties of Magnetorheological Elastomers: Experiment and Modelling,» *International Conference on Smart Materials Applications*, vol. 559, nº 012001, pp. 2-6, 2019.
- [38] R. S. S. R. M. Hemmatian, «Characterization and modeling of temperature effect on the shear mode properties of magnetorheological elastomers,» *IOP Publishing Ltd*, vol. 29, pp. 1-19, 2020.
- [39] G. H. Zhu, «Dynamic Mechanical Properties of Magnetorheological Elastomers: Experiment and Modelling,» *IOP Publishing*, vol. 559, nº 012001, pp. 2-6, 2019.

## Apéndice A Datos aplicados de orden para el ajuste de las condiciones

**Tabla A1** – Valores de a, b, Go y Gu para ajuste de modelo a las condiciones experimentales.

Volpe V	a	b	Go (Pa)	Gu (Pa)
G* + 50% Fe	0.7	0.2	$10 \times 10^3$	$7200 \times 10^3$
G*	0.7	0.4	$100 \times 10^3$	$6300 \times 10^3$
Wittenberg E	a	b	Go	Gu
wa	0.4	0.5	$900 \times 10^3$	$30000 \times 10^3$
wb	0.4	0.5	$1500 \times 10^3$	$5000 \times 10^3$
wc	0.3	0.2	$20 \times 10^3$	$8000 \times 10^3$
Abdul S	a	b	Go	Gu
0A'	0.9	0.6	$362 \times 10^3$	$1460 \times 10^3$
1A'	0.9	0.8	$469 \times 10^3$	$1630 \times 10^3$
2A'	0.92	0.8	$468 \times 10^3$	$1698 \times 10^3$
3A'	1.08	0.85	$546 \times 10^3$	$2300 \times 10^3$
Ahmad M	a	b	Go	Gu
iso 0 mT	0.4	0.2	$360 \times 10^3$	$1900 \times 10^3$
Ani 0 mT	0.4	0.2	$980 \times 10^3$	$2900 \times 10^3$
iso 600 mT	0.9	0.6	$280 \times 10^3$	$1400 \times 10^3$
Ani 600 mT	0.9	0.6	$380 \times 10^3$	$1800 \times 10^3$
Abdul S (0 mT)	a	b	Go	Gu
MRE	0.79	0.24	$435 \times 10^3$	$515 \times 10^3$
MRE MWCNT	0.73	0.56	$451 \times 10^3$	$510 \times 10^3$
MRE MWCNT COOH	0.77	0.73	$450 \times 10^3$	$501 \times 10^3$
MRE MWCNT OH	0.67	0.35	$4505 \times 10^2$	$512 \times 10^3$
Abdul S (186 mT)	a	b	Go	Gu
MRE	0.50	0.42	$420 \times 10^3$	$513 \times 10^3$
MRE MWCNT	0.70	0.10	$448 \times 10^3$	$570 \times 10^3$
MRE MWCNT COOH	0.78	0.74	$502 \times 10^3$	$502 \times 10^3$
MRE MWCNT OH	0.74	0.12	$453 \times 10^3$	$557 \times 10^3$
Abdul S (336 mT)	a	b	Go	Gu
MRE	0.57	0.52	$429 \times 10^3$	$509 \times 10^3$
MRE MWCNT	0.61	0.43	$380 \times 10^3$	$455 \times 10^3$
MRE MWCNT COOH	0.80	0.05	$451 \times 10^3$	$560 \times 10^3$

MRE MWCNT OH	0.80	0.30	$448 \times 10^3$	$536 \times 10^3$
Abdul S (508 mT)	a	b	Go	Gu
MRE	0.63	0.12	$433 \times 10^3$	$569 \times 10^3$
MRE MWCNT	0.64	0.329	$388 \times 10^3$	$474 \times 10^3$
MRE MWCNT COOH	0.6	0.5	$459 \times 10^3$	$540 \times 10^3$
MRE MWCNT OH	0.61	0.48	$452 \times 10^3$	$527 \times 10^3$
Abdul S (747 mT)	a	b	Go	Gu
MRE	0.70	0.43	$445 \times 10^3$	$529 \times 10^3$
MRE MWCNT	0.61	0.28	$406 \times 10^3$	$492 \times 10^3$
MRE MWCNT COOH	0.65	0.51	$479 \times 10^3$	$545 \times 10^3$
MRE MWCNT OH	0.69	0.53	$472 \times 10^3$	$539 \times 10^3$
Abdul S (0 mT)	a	b	Go	Gu
MRE	0.77	0.18	$434 \times 10^3$	$534 \times 10^3$
MRE MWCNT	0.47	0.40	$365 \times 10^3$	$440 \times 10^3$
MRE MWCNT COOH	0.62	0.15	$446 \times 10^3$	$578 \times 10^3$
MRE MWCNT OH	0.60	0.04	$448 \times 10^3$	$575 \times 10^3$
Abdul S ( mT)	a	b	Go	Gu
MRE	0.70	0.48	$439 \times 10^3$	$518 \times 10^3$
MRE MWCNT	0.70	0.40	$398 \times 10^3$	$474 \times 10^3$
MRE MWCNT COOH	0.82	0.82	$480 \times 10^3$	$526 \times 10^3$
MRE MWCNT OH	0.63	0.50	$462 \times 10^3$	$535 \times 10^3$
Hemmatian	a	b	Go	Gu
-10 °C	0.86	0.15	$45.5 \times 10^3$	$385 \times 10^3$
10 °C	0.86	0.1	$43.5 \times 10^3$	$290 \times 10^3$
30 °C	0.87	0.14	$41 \times 10^3$	$202 \times 10^3$
50 °C	0.87	0.14	$41 \times 10^3$	$202 \times 10^3$
Zhu G	a	b	Go	Gu
0 mT	0.95	0.33	$1200 \times 10^3$	$1700 \times 10^3$
160 mT	0.85	0.16	$1050 \times 10^3$	$2090 \times 10^3$
260 mT	0.87	0.20	$1100 \times 10^3$	$2190 \times 10^3$
450 mT	0.87	0.22	$1090 \times 10^3$	$2320 \times 10^3$
500 mT	0.87	0.22	$1040 \times 10^3$	$2410 \times 10^3$

## Apéndice B Tablas correspondientes a Datos experimentales

**Tabla B1** – Propiedades reológicas de elastómero reforzado con partículas ferromagnéticas.

G'	G''	G' +50% Fe	G'' +50% Fe
155800	100000	238600	271900
182800	118900	255700	287200
202600	139600	274600	328600
224200	165700	295300	352000
239500	188200	308800	375400
264700	212500	330400	388000
288100	240400	343000	406000
307000	264700	363700	421300
328600	295300	379900	437500
355600	316000	397900	445600
378100	345700	414100	458200
398800	366400	433900	468100
424000	394300	447400	489700
448300	420400	467200	503200
469900	445600	483400	519400
494200	472600	500500	532900
519400	495100	515800	550000
542800	514900	535600	565300
577900	541000	551800	583300
600400	564400	568000	599500
635500	589600	585100	615700
650800	609400	603100	631900
667000	631000	617500	647200
696700	650800	633700	663400
715600	672400	652600	677800
730000	692200	667900	694000
748900	711100	684100	710200
771400	731800	700300	730000
791200	750700	714700	742600
809200	770500	732700	757900
826300	787600	741700	771400
846100	807400	757900	787600
863200	823600	766900	801100
880300	841600	789400	817300

**Tabla B2** – Propiedades reológicas de elastómero reforzado con partículas ferromagnéticas 0A, 1A, 2A y 3A corresponden al nivel de corriente eléctrica inducida en el campo magnético.

0A	0A	1A	1A
261200	17186.96	291200	21840
321200	30963.68	356000	33464
335600	32821.68	370400	34817.6
340400	33903.84	380000	36480
346400	35263.52	388400	38063.2
351200	36665.28	393200	39713.2
356000	37949.6	396800	40870.4
359600	39124.48	401600	42168
362000	40182	406400	43484.8
364400	41468.72	408800	44886.24
368000	42320	411200	46136.64
371600	44146.08	414800	47619.04
374000	45927.2	417200	48728.96
377600	47275.52	418400	50542.72
377600	48483.84	420800	52095.04
377600	50522.88	423200	54084.96
378800	52274.4	424400	56020.8
380000	54264	424400	57718.4
382400	56518.72	424400	59755.52
384800	59567.04	426800	62739.6
386000	61296.8	431600	65948.48
386000	64384.8	432800	68382.4
386000	67858.8	432800	71412
387200	71089.92	432800	74441.6
388400	74883.52	432800	79981.44
390800	78472.64	432800	81712.64
392000	83104	436400	86319.92
394400	87477.92	434000	93744
395600	90592.4	437600	92246.08
396800	97216	434000	99820

<b>2A</b>	<b>2A</b>	<b>3A</b>	<b>3A</b>
333200	28921.76	377600	37231.36
416000	37689.6	461600	41451.68
435200	39603.2	484400	43208.48
443600	41166.08	495200	44369.92
450800	42735.84	506000	46349.6
458000	43876.4	512000	47616
462800	45354.4	516800	49096
466400	47013.12	521600	50595.2
468800	48192.64	525200	51994.8
473600	49633.28	530000	53424
476000	50741.6	531200	55032.32
478400	52528.32	534800	55940.08
480800	54041.92	536000	57673.6
482000	55622.8	538400	59008.64
483200	57307.52	540800	60894.08
485600	59243.2	540800	62624.64
485600	61088.48	540800	64138.88
485600	62933.76	543200	66487.68
485600	65361.76	545600	68963.84
488000	68124.8	548000	72226.4
490400	70421.44	549200	73702.64
490400	73952.32	548000	77596.8
489200	76902.24	549200	80732.4
488000	80812.8	548000	84392
488000	85692.8	549200	90837.68
490400	88272	549200	92045.92
488000	92427.2	549200	96659.2
492800	98264.32	549200	100723.28
488000	100332.8	549200	103579.12
484400	105986.72	545600	111193.28

**Tabla B3** – propiedades reológicas del polímero con tres grados de modificación (4% wa, 7% wb y 15% wc de modificación de relación con el número total de unidades repetidas en el polímero)

<b>G' (DWA)</b>	<b>G'' (DWA)</b>	<b>G' (DWB)</b>	<b>G'' (DWB)</b>
1160000	465000	1110000	298000
1320000	493000	1150000	286000
1500000	516000	1150000	279000
1580000	527000	1220000	289000
1700000	556000	1240000	272000
1800000	588000	1300000	283000
1880000	630000	1350000	286000
1970000	670000	1410000	291000
2090000	735000	1480000	293000
2160000	799000	1570000	299000
2340000	908000	1620000	309000
2400000	986000	1720000	320000
2480000	1090000	1800000	324000
2630000	1210000	1860000	335000
2850000	1360000	2000000	358000
3020000	1520000	2090000	375000
3200000	1690000	2160000	392000
3390000	1870000	2340000	434000
3590000	2060000	2450000	469000
3800000	2270000	2600000	518000
4070000	2530000	2720000	572000

<b>G' (DWC)</b>	<b>G'' (DWC)</b>
94406.1	68600
114815	77900
139637	86200
165959	104000
179887	94800
221309	108000
248313	120000
291743	134000
323594	138000



363078	152000
402717	168000
441570	185000
501187	200000
537032	216000
616595	248000
653131	261000
749894	299000
822243	327000
944061	373000
1050000	412000
1120000	438000

**Tabla B4** – Datos obtenidos al agregar aplicar 0 y 600 mT. A muestras isotrópicas y anisotrópicas.

<b>G' (iso 0 mT)</b>	<b>G'' (iso 0 mT)</b>	<b>G' (Ani 0 mT)</b>	<b>G'' (Ani 0 mT)</b>
239400	26429.76	456400	59879.68
264600	29211.84	455000	59332
275800	29565.76	484400	60453.12
291200	32148.48	509600	62782.72
287000	35358.4	508200	70334.88
291200	39836.16	518000	75420.8
296800	41552	527800	75580.96
298200	45087.84	536200	77641.76
296800	47250.56	540400	80411.52
308000	44844.8	548800	82539.52
305200	53226.88	557200	93163.84
303800	57357.44	555800	92040.48
303800	61732.16	561400	94315.2
303800	63919.52	565600	99998.08
303800	68294.24	574000	108371.2
299600	75019.84	571200	105557.76
299600	78135.68	574000	107912
294000	90316.8	582400	112752.64
291200	97144.32	585200	127339.52
295400	101853.92	586600	132336.96

<b>G' (iso 600 mT)</b>	<b>G'' (iso 600 mT)</b>	<b>G' (Ani 600 mT)</b>	<b>G'' (Ani 600 mT)</b>
288400	35300.16	859600	79083.2
336000	37363.2	1033200	98360.64
359800	35404.32	1093400	104966.4
354200	44204.16	1176000	113836.8
369600	44943.36	1162000	103185.6
379400	45528	1177400	103611.2
386400	51004.8	1195600	107125.76
390600	54684	1213800	107785.44
392000	55507.2	1220800	111336.96
400400	56056	1234800	113601.6
400400	60540.48	1230600	115184.16
403200	65802.24	1254400	121425.92
418600	70659.68	1265600	123522.56
421400	76526.24	1265600	131622.4
425600	80353.28	1269800	138154.24
424200	84161.28	1282400	139525.12
425600	84098.56	1295000	139860
425600	102824.96	1292200	145760.16
427000	105896	1293600	155232
428400	119266.56	1297800	164041.92