



EDUCACIÓN
SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA



TECNOLÓGICO
NACIONAL DE MÉXICO

Instituto Tecnológico de Pachuca

INSTITUTO TECNOLÓGICO DE PACHUCA

DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE UN ABSORBEDOR FLEXIBLE PARA EL CONTROL PASIVO DE VIBRACIONES EN UNA ESTRUCTURA TIPO EDIFICIO

TESIS PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRO EN INGENIERÍA MECÁNICA
PRESENTA

NÉSTOR FLORES MORITA

DIRECTOR:

DR. HUGO FRANCISCO ABUNDIS FONG

SINODALES:

DR. EDGAR ERNESTO VERA CÁRDENAS

DR. IGNACIO RAMÍREZ VARGAS

Pachuca de Soto, Hidalgo septiembre de 2021



Carretera México-Pachuca Km. 87.5, Col. Venta Prieta,
Pachuca, Hidalgo. C.P. 42080 A.P. 276
Tels.: (771) 7105251, 170 0301, 170 0345 y 170 0687
tecnm.mx | pachuca.tecnm.mx





EDUCACIÓN
SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA



TECNOLÓGICO
NACIONAL DE MÉXICO

Instituto Tecnológico de Pachuca
División de Estudios de Posgrado e Investigación

Pachuca, Hidalgo, 24/Agosto/2021
OFICIO No. DEPI-71-21

**C. ING. NÉSTOR FLORES MORITA
PRESENTE**

La que suscribe, jefa de la División de Estudios de Posgrado e Investigación, le comunica que los miembros de la Comisión Revisora, designada por el Consejo de Posgrado de la Maestría en Ingeniería Mecánica para examinar su Tesis:

Diseño e implementación de un absorbedor
flexible para el control pasivo de vibraciones en
una estructura tipo edificio

se han reunido, y después de intercambiar opiniones manifiestan su aprobación de la Tesis, en virtud que satisface los requisitos señalados por las disposiciones reglamentarias vigentes y, en consecuencia, se autoriza su impresión.

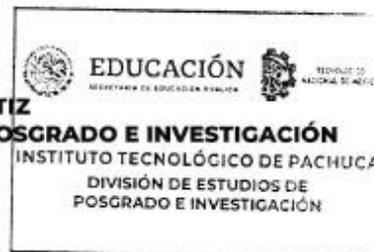
Sin otro particular por el momento, quedo de Usted.

ATENTAMENTE

El Hombre Alimenta el Ingenio en Contacto con la Ciencia


M. A. C. ELODIA CLAUDIA GUERRERO ORTIZ
JEFA DE LA DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO E INVESTIGACIÓN

C.p. Archivo
ECCO/LMPP



Carretera México-Pachuca Km. 87.5, Col. Venta Prieta,
Pachuca, Hidalgo, C.P. 42080 A.P. 276
Tels.: (771) 7105251, 170 0301, 170 0345 y 170 0687
tecnm.mx | pachuca.tecnm.mx





Consejo de Posgrado de la Maestría en Ingeniería Mecánica
ACTA

Siendo las 13:00 horas del 19 de febrero de 2020, reunidos a distancia, el Consejo de Posgrado de la Maestría en Ingeniería Mecánica manifiesta la APROBACIÓN del tema de Tesis: *Diseño e implementación de un absorbedor flexible para el control pasivo de vibraciones en una estructura tipo edificio*, con el siguiente contenido:

- Resumen/Abstract
- Nomenclatura
- Contenido
- Índice de cuadros, gráficas y figuras.
- 1- Introducción
- 2- Estado del arte
- 3- Marco teórico
- 4- Materiales y métodos
- 5- Resultados experimentales
- Conclusiones
- Bibliografía
- Apéndices

Para cubrir el requisito correspondiente a la Tesis para que el Ing. Néstor Flores Morita obtenga el grado de Maestro en Ingeniería Mecánica, bajo la dirección del Dr. Hugo Francisco Abundis Fong.

ATENTAMENTE

El Hombre Alimenta el Ingenio en Contacto con la Ciencia

EL CONSEJO DE POSGRADO

Dr. Hugo Francisco Abundis Fong

Dr. Armando Irvin Martínez Pérez

Dr. Luis Manuel Palacios Pineda

Dra. Erika Osiris Ávila Dávila

Dr. Ignacio Ramírez Vargas

Dr. Edgar Ernesto Vera Cárdenas

Dra. Mariña Moreno Ríos

Dr. Juan Serrano Arellano

Dr. Valente Hernández Pérez

DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE UN ABSORBEDOR FLEXIBLE PARA EL CONTROL PASIVO
DE VIBRACIONES EN UNA ESTRUCTURA TIPO EDIFICIO

DEDICATORIAS

A mis Padres:

Por el orgullo, satisfacción y alegría que les hubiera causado
mi promesa cumplida.

A mis Familiares:

Para que las nuevas generaciones tengan una motivación y el
objetivo de rebasar sus expectativas.

A la Mujer:

Que sigue siendo motivación de todos mis anhelos, la razón de
ser y el alimento de mi espíritu.

AGRADECIMIENTOS

A mi Escuela:

A la que debo lo que soy y mis logros profesionales, en sus primeros 50 años de vida institucional.

Al CONACyT:

Por el apoyo económico que me otorgó como becario.

A mis Catedráticos:

Por su paciencia, apoyo y conocimientos compartidos.

A mis Compañeros y amigos:

Por sus aportaciones y gran soporte técnico.

Al Arq. Fernando Martínez Domínguez

Constructor del complejo Vía Dorada, que me permitió distinguir entre un absorbedor y un disipador híbrido de vibraciones.

Al Dr. Luis Gerardo Trujillo Franco

Egresado del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados IPN.
Por su incondicional apoyo, al compartirme el uso de programas desarrollados en sus tesis de maestría y doctorado, para la obtención de parámetros modales y la interpretación numérica de las no linealidades (sección 4.4.3).

RESUMEN

Actualmente, en la mayoría de construcciones civiles y maquinaria, se utilizan absorbedores de vibraciones; por lo que, en el presente trabajo de tesis, se abordó el problema de absorción pasiva de vibraciones en osciladores mecánicos lineales, existiendo así la oportunidad de realizar un estudio comparativo (analítico y experimental), que permita aportar nuevos esquemas o mejorar los ya existentes. Se decidió, utilizar una estructura tipo edificio de un piso, elaborada de aluminio y montada en un robot paralelo de 6 grados de libertad, conocido como hexápodo; el cual, perturba al sistema en su base por medio de señales armónicas en su frecuencia natural principal (modo dominante). Una vez que se obtuvo el modelo dinámico del sistema primario, usando la metodología de Euler-Lagrange, con la aplicación de las técnicas de análisis modal, se obtuvieron las amplitudes del sistema primario y secundario, logrando de esa manera, la condición de sintonización, que permitió conocer la rigidez del absorbedor y en consecuencia, sus dimensiones requeridas para suprimir las vibraciones causadas inicialmente. Se realizaron simulaciones en Matlab-Simulink, donde se obtuvo la respuesta numérica de las condiciones a estudiar; las cuales sirvieron como base para comparar con los resultados de la prueba experimental, desde el punto de vista temporal, frecuencial y energético.

Los casos de estudio de interés son: amortiguador de masa sintonizada, conocido como TMD (por sus siglas en inglés), el de tipo columna colgante y una configuración no lineal (auto paramétrico).

Palabras clave: control pasivo de vibración, función de respuesta frecuencial y análisis modal.

DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE UN ABSORBEDOR FLEXIBLE PARA EL CONTROL PASIVO DE VIBRACIONES EN UNA ESTRUCTURA TIPO EDIFICIO

ABSTRACT

Currently, in most civil constructions and machinery, vibration absorbers are used; Therefore, in the present thesis work, the problem of passive absorption of vibrations in linear mechanical oscillators is addressed, thus existing the opportunity to carry out a comparative study (analytical and experimental), that allows to contribute new schemes or improve existing ones. It was decided to use a one-story building-like structure, made of aluminum and mounted on a parallel robot with 6 degrees of freedom, known as a hexapod; which disturbs the system at its base through harmonic signals, in its main natural frequency (dominant mode). Once the dynamic model of the primary system was obtained, using the Euler-Lagrange methodology, with the application of modal analysis techniques, the amplitudes of the primary and secondary system were obtained, thus achieving the tuning condition, which allowed to know the rigidity of the absorber and consequently, its dimensions required to suppress the vibrations initially caused. Simulations results were carried out in Matlab-Simulink, where the numerical response of the conditions to be studied was obtained; which served as a basis to compare with the results of the experimental test, from the point of view of time, frequency and energy.

The case studies of interest are: tuned mass damper, known as TMD (for its acronym in English), the hanging column type and a non-linear configuration (autoparametric).

Keywords: passive vibration control, frequency response function and modal analysis.

DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE UN ABSORBEDOR FLEXIBLE PARA EL CONTROL PASIVO
DE VIBRACIONES EN UNA ESTRUCTURA TIPO EDIFICIO

INDICE GENERAL

DEDICATORIAS.....	I
AGRADECIMIENTOS.....	II
RESUMEN.....	III
ABSTRACT.....	IV
INDICE GENERAL.....	V
1. INTRODUCCIÓN.....	1
1.1 Historia de las vibraciones.....	1
1.2 Absorción de vibraciones.....	3
1.3 Control de vibraciones en estructuras.....	5
1.4 Planteamiento del problema.....	6
1.5 Justificación.....	8
1.6 Objetivos de la tesis.....	8
1.7 Organización de la tesis.....	9
2. ESTADO DEL ARTE O ANTECEDENTES.....	10
2.1 La columna colgante como amortiguador dinámico de vibraciones.....	13
3. MARCO TEÓRICO.....	14
3.1 Fundamentos de Dinámica estructural.....	14
3.1.1 Dinámica, carga dinámica y respuesta estructural a una carga dinámica.....	14
3.1.2 Grados de libertad.....	14
3.1.3 Vibraciones mecánicas.....	14
3.1.4 Elementos de un Sistema vibratorio.....	16
3.1.5 Tipos de excitación dinámica.....	16
3.1.6 Supresión de vibraciones.....	17
3.2 Análisis modal.....	17
3.3 Absorbedor lineal de vibraciones (TMD).....	19
3.4 Absorbedor de vibraciones no lineal: sistema autoparamétrico.....	20
3.5 Modelo dinámico de una estructura tipo edificio de 1 gdl, sin absorbedor de vibraciones.....	21
4. MATERIALES Y MÉTODOS.....	24
4.1 Modelo dinámico del sistema.....	24
4.1.1 Condición de Sintonización de un absorbedor de masa sintonizado.....	27
4.1.2 Resultados en simulación.....	29
4.2 Modelo dinámico del sistema utilizando un absorbedor autoparamétrico.....	31
4.2.1 Resultados en simulación.....	34
4.3 Breve discusión de los resultados.....	37

DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE UN ABSORBEDOR FLEXIBLE PARA EL CONTROL PASIVO
DE VIBRACIONES EN UNA ESTRUCTURA TIPO EDIFICIO

4.4	Modelo dinámico propuesto para la estructura tipo edificio con absorbedor flexible de vibraciones.....	38
4.4.1	Condición de sintonización.....	44
4.4.2	Resultados en simulación.....	45
4.4.3	Análisis de las no linealidades	48
4.4.4	Otras posibles configuraciones del absorbedor flexible de vibraciones	52
5.	RESULTADOS EXPERIMENTALES	55
5.1	Caracterización de los parámetros modales.....	56
5.1.1	Sistema primario	56
5.1.2	Sistema secundario	59
5.2	Sistema primario con absorbedor flexible de vibraciones: Primera configuración.....	61
5.3	Sistema primario con absorbedor flexible de vibraciones: Segunda configuración.....	69
6.	CONCLUSIONES	74
7.	BIBLIOGRAFÍA.....	76
8.	ANEXO A.....	81
8.1	Planos de la plataforma experimental en SolidWorks.....	81
9.	ANEXO B	92
9.1	Programas utilizados	92
10.	ANEXO C	95
10.1	Publicaciones.....	95

Índice de figuras

1.1.	Estructura tipo edificio discretizada en N grados de libertad.	6
1.2.	Diferentes configuraciones del absorbedor flexible de vibraciones propuestas.	7
3.1.	Elementos de un sistema vibratorio	16
3.2.	Sistema masa resorte amortiguador de 1 gdl con movimiento en la base	21
3.3.	Diagrama de cuerpo libre y cinético del sistema	22
4.1.	Diagrama esquemático del sistema primario con TMD	24
4.2.	Diagrama equivalente del sistema primario con TMD.	25
4.3.	Respuesta dinámica del sistema primario sin y con TMD	30
4.4.	Función de respuesta frecuencial del sistema primario sin y con TMD	30
4.5.	Respuesta dinámica del sistema secundario configurado como TMD	31
4.6.	Diagrama esquemático del sistema primario con absorbedor autoparamétrico.	31
4.7.	Respuesta temporal del sistema primario sin y con absorbedor autoparamétrico	35
4.8.	Respuesta temporal del absorbedor no lineal cuando existe interacción autoparamétrica	35
4.9.	FRF del sistema primario con absorbedor autoparamétrico	36
4.10.	FRF del sistema secundario cuando se presenta interacción autoparamétrica	36
4.11.	Respuesta del sistema primario con absorbedor autoparamétrico ante un barrido senoidal	37
4.12.	Dibujo en CAD de la estructura tipo edificio con absorbedor flexible de vibraciones.	39
4.13.	Representación esquemática del sistema primario con absorbedor flexible de vibraciones	39
4.14.	Patrón de deformación que tiene el absorbedor flexible de vibraciones.	41

DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE UN ABSORBEDOR FLEXIBLE PARA EL CONTROL PASIVO DE VIBRACIONES EN UNA ESTRUCTURA TIPO EDIFICIO

4.15. Respuesta dinámica del sistema primario sin y con absorbedor flexible de vibraciones.	46
4.16. Respuesta temporal del sistema secundario	47
4.17. Respuesta dinámica del sistema primario ante un barrido senoidal	47
4.18. Función de la respuesta frecuencial de la estructura tipo edificio	48
4.19. Función de respuesta frecuencial del sistema secundario	48
4.20. FRF original y su transformada de Hilbert	51
4.21. Diagrama de Nyquist de la FRF original y su transformada de Hilbert	50
4.22. Diferentes configuraciones del absorbedor flexible de vibraciones: a) dinámica en un plano horizontal, b) dinámica en un plano vertical (energía potencial positiva), c) dinámica en un plano horizontal (el eje del absorbedor es paralelo a la dirección de la excitación)	52
5.1. Sistema primario montado en el Hexapod-Quanser	54
5.2. Sistema de adquisición de datos colocado en el sistema primario	55
5.3. Respuesta libre del sistema primario ante una condición inicial de posición	56
5.4. Transformada rápida de Fourier de la respuesta libre de la estructura tipo edificio	57
5.5. Absorbedor flexible de vibraciones	58
5.6. Respuesta libre del sistema secundario	59
5.7. Transformada rápida de Fourier de la respuesta libre del sistema secundario	59
5.8. Estructura tipo edificio con absorbedor flexible de vibraciones	60
5.9. Respuesta temporal (experimental) del sistema primario sin y con absorbedor flexible de vibraciones.	61
5.10. Respuesta temporal (experimental) del sistema secundario.	62
5.11. Transformada rápida de Fourier experimental del sistema primario (primera configuración)	63
5.12. Técnica de curve fitting aplicada a la FRF experimental del sistema primario (primera configuración)	64
5.13. Aceleración de cada grado de libertad en el primer modo de vibración	65
5.14. Aceleración de cada grado de libertad en el segundo modo de vibración	65
5.15. Primer modo de vibración del sistema discretizado en 2 gdl	66
5.16. Segundo modo de vibración del sistema discretizado en 2 gdl.	67

DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE UN ABSORBEDOR FLEXIBLE PARA EL CONTROL PASIVO DE VIBRACIONES EN UNA ESTRUCTURA TIPO EDIFICIO

5.17. Estructura tipo edificio con absorbedor flexible de vibraciones con dinámica en plano horizontal 68

5.18. Respuesta temporal del sistema primario sin y con absorbedor flexible de vibraciones con dinámica en plano horizontal 69

5.19. Respuesta temporal del sistema secundario con dinámica en plano horizontal . . . 70

5.20. Comparación entre la FRF y amplitud de vibración de la estructura tipo edificio con sistema secundario en plano horizontal. 71

5.21. Valor del polinomio $p(L)$ en función de la longitud del absorbedor flexible de vibraciones 72

Índice de tablas

4.1. Parámetros del sistema con TMD	29
4.2 Parámetros del sistema con absorbedor flexible	45
5.1. Parámetros modales del sistema primario	58
5.2. Parámetros modales del sistema secundario	59
5.3. Parámetros del sistema mostrado en figura 5.8	61
5.4. Parámetros modales del sistema mostrado en figura 5.8	64
5.5. Valor de la longitud del sistema secundario con base a su configuración	72

Capítulo 1

1. INTRODUCCIÓN

1.1 Historia de las vibraciones

El primer antecedente que se tiene de la aparición de las vibraciones en la historia de la humanidad, es cuando por motivo de las bellas artes, se empezaron a crear instrumentos musicales de cuerdas, es así como en el año 4000 a.c. en las culturas: China, India, Japonesa y Egipcia, se desarrollaron reglas bien definidas; aunque sus conocimientos no fueron suficientes para alcanzar el nivel de una ciencia.

Se le atribuye al matemático Pitágoras (582-507 a.c.) el primer estudio científico sobre sonidos musicales, él demostró que, si dos cuerdas similares se someten a igual tensión y si la longitud de una es la mitad de la otra, los tonos que producen son una octava.

Posteriormente, Galileo Galilei (1564-1642), a quien se considera el padre de los científicos, por haber desarrollado el método científico, fue el primero en demostrar que el tono de un sonido, está relacionado con la frecuencia de vibración. También sentó las bases para los estudios de los sistemas vibratorios, a través de sus observaciones con respecto a los movimientos de una lámpara colgada en la catedral de Pisa, Italia, él encontró que el periodo del movimiento es independiente de la amplitud de la oscilación. Esta propiedad se aplica a todos los sistemas vibratorios que pueden describirse por modelos lineales (sistema pendular, que se ha utilizado para ilustrar los principios de vibraciones durante muchos siglos).

La solución teórica (dinámica) del problema de la cuerda vibrante fue encontrada en 1713 por el matemático Inglés Brook Taylor (1685-1731). Quien también presentó el teorema de Taylor, en series infinitas. El procedimiento aportado por Taylor, se perfeccionó a través de la introducción de derivadas parciales en las ecuaciones de movimiento de Daniel Bernoulli (1700-1782), Jean D'Alambert (1717-1783) y Leonard Euler (1708-1783) (Rao, 1995 [1]).

DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE UN ABSORBEDOR FLEXIBLE PARA EL CONTROL PASIVO DE VIBRACIONES EN UNA ESTRUCTURA TIPO EDIFICIO

Robert Hooke el 8 de julio de 1680, fue capaz de desarrollar los patrones nodales, asociados con los modelos de vibración de placas de vidrio cubiertas con flúor y excitadas mediante un arco.

Ernst Florenz Friedrich Chladni (1756-1824) a quien se le considera como el padre de la acústica, en 1768 continuó con los experimentos de Hooke y en 1802 inventó una técnica para mostrar los diversos modos de vibración de una superficie rígida; cuando resuena una placa o membrana, se divide en regiones que vibran en direcciones opuestas, limitadas por líneas donde no ocurre vibración, llamadas líneas modales (Stöckmann, 2007 [2]).

Desde 1999, se ha promovido el uso de procedimientos de control estructural en proyectos de ingeniería en China. A partir de 2009, en 17 grandes puentes, se han instalado exitosamente sistemas de amortiguación, proporcionados por dispositivos Taylor, para la protección contra: terremotos, viento, vehículos y otro tipo de excitaciones (Chen et al., 2007 [3]).

La expectativa que se tiene, es la de contribuir al entendimiento cabal de este tema, para que la comunidad científica del mundo, amplíe el panorama y se desarrollen tecnologías de punta, que permitan eliminar o reducir los efectos indeseables en el funcionamiento de la maquinaria y en las devastadoras consecuencias de los fenómenos naturales, como son los terremotos.

El campo de aplicación del tema que nos ocupa, es para estructuras flexibles tipo edificio de un solo piso, sometidas al menos a una de sus frecuencias naturales (condición extrema de resonancia).

La cancelación o al menos la atenuación de las vibraciones que afectan un sistema se puede abordar de dos maneras diferentes:

- 1.-Modificando la estructura física del sistema (Control Pasivo).
- 2.-Utilizando la información de sensores para aplicar un esquema de control prealimentado/retroalimentado (Control Activo).

La teoría de control estructural en edificios, evalúa el uso de esquemas activos como una alternativa de mejorar el control pasivo; lo cual consiste en la retroalimentación y/o avance de la información de sensores montados en la estructura para controlar el conjunto de frecuencias resonantes o modos de vibración.

DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE UN ABSORBEDOR FLEXIBLE PARA EL CONTROL PASIVO DE VIBRACIONES EN UNA ESTRUCTURA TIPO EDIFICIO

Recientemente, la ocurrencia de eventos naturales relacionados a la actividad sísmica o terremotos, ha resultado de gran interés para la ingeniería y comunidad científica en todo el mundo. Particularmente para la ingeniería civil. En general, el diseño y construcción de estructuras resistentes a los riesgos; como edificios y rascacielos son necesarios en ciudades modernas (Craig & Kurdila, 2006[4]).

Estos diseños implementan esquemas de control estructural bastante utilizados para aplicaciones reales, con la intención de reducir los efectos negativos, como el riesgo de grietas o colapsos, causados por un terremoto. Estos sistemas son conocidos como control de vibraciones: pasivo, semi-activo y activo en Ingeniería Civil (Gauronsky/Preumont, 2008 [5]).

1.2 Absorción de vibraciones

Las vibraciones mecánicas son una fuente común de problemas originados en numerosas aplicaciones de ingeniería. En general, este tipo de señales externas son el resultado de acoplamientos que ocurren entre varios sistemas dinámicos o, simplemente, debidos a la acción de fuerzas dinámicas exógenas (externas) o endógenas (internas). Las vibraciones mecánicas pueden ocasionar deformaciones, desgaste, fatiga o destrucción de los componentes mecánicos. También pueden generar ruido o transmitir fuerzas indeseables a los soportes, estructuras, instrumentación o elementos de máquinas. Las vibraciones son un problema porque provocan movimientos indeseables, ruido y esfuerzos dinámicos que pueden producir fatiga y falla de la estructura o máquina, y también porque implican grandes pérdidas de energía y reducción en el desempeño. (Rao [1]; Korenev y Reznikov, 1993 [6]; Genta, 1995 [7])

El problema de control de vibraciones se puede tratar con diversos métodos o herramientas disponibles en ingeniería. Por ejemplo, se pueden mencionar los siguientes casos (Fuller , Elliot y Nelson, 1997 [8]; Van Brussel et al, 1994 [9]; Meirovitch, 1991 [10]).

- Modificar las frecuencias naturales ajustando masas o constantes de rigidez, para evitar fenómenos de resonancia bajo la acción de fuerzas exógenas. Los movimientos excesivos, tanto en la respuesta transitoria como en estado estacionario, también se pueden reducir

DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE UN ABSORBEDOR FLEXIBLE PARA EL CONTROL PASIVO DE VIBRACIONES EN UNA ESTRUCTURA TIPO EDIFICIO

mediante la inyección de amortiguamiento (amortiguamiento viscoso o mecanismos disipadores de energía).

- Reducir la transmisión de fuerzas de excitación de un sistema a otro, mediante el uso de aisladores de vibración (acoplamientos de material elástico o flexible, como combinación de hules y resortes), los cuales son dispositivos que se sitúan entre el equipo sometido a vibraciones y la fuente de excitación.
- Reducir la respuesta del sistema, mediante el uso de grados de libertad adicionales que conforman el absorbedor de vibraciones que puede ser controlado en lazo abierto (control pasivo) o en lazo cerrado (control activo).

En resumen, la cancelación, aislamiento o atenuación de ruido y vibraciones que afectan a un sistema mecánico se puede abordar esencialmente de dos maneras distintas: modificar la estructura física del sistema, empleando técnicas de amortiguamiento pasivo (control pasivo) o utilizar la información obtenida de sensores, para aplicar un esquema de control retroalimentado y/o prealimentado (control activo). Los métodos de control pasivo son efectivos para altas frecuencias; sin embargo, el rediseño del sistema implica en general, costos de implementación muy elevados.

Una mejor clasificación de los métodos para control de vibraciones incluye a los esquemas pasivos, semi-activos y activos (Van Brussel et al [9]). Los dispositivos para control pasivo combinan masas, resortes y amortiguadores, con el fin de modificar la estructura del sistema original. Este método no emplea ninguna retroalimentación de la información del sistema (control en lazo abierto); por lo cual, solo pueden compensar vibraciones en una frecuencia de operación específica en sistemas estables. Los dispositivos de control semi-activos se obtienen cuando en un control pasivo las masas, resortes y/o amortiguadores se pueden calibrar de acuerdo a un estudio de la dinámica en lazo abierto, con tal de lograr un mejor desempeño. Los dispositivos para control activo (control en lazo cerrado) utilizan la información obtenida de sensores de posición, velocidad o aceleración para modificar la dinámica del sistema de acuerdo a actuadores que operan basados en las técnicas de control retroalimentado y/o prealimentado (Fuller, Elliot y Nelson [8]; Meirovich [10]).

DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE UN ABSORBEDOR FLEXIBLE PARA EL CONTROL PASIVO DE VIBRACIONES EN UNA ESTRUCTURA TIPO EDIFICIO

Es importante notar que, si bien el diseño de un control pasivo o semi-activo es muy simple, éste no resulta adecuado cuando las señales de excitación no se mantienen constantes, por ejemplo, amplitudes y/o frecuencias variables, o también cuando los parámetros del sistema vibratorio no se conocen muy bien. El control activo de vibraciones trata de eliminar muchas de estas desventajas, agregando grados de libertad y actuadores que permitan la aplicación de técnicas de control retroalimentado y/o prealimentado.

A pesar de que los métodos de control activo se conocen desde la década de los 30's (Den Hartog 1934, [11]; Braun, Ewins y Rao, 2001 [12]), no es sino hasta las últimas décadas que se han aplicado en muchos sistemas complejos, incorporando sensores, actuadores y procesadores de señales con características adecuadas como tamaño, peso, exactitud, rapidez, bajo consumo de energía y bajo costo. Así, debido a los constantes desarrollos tecnológicos, últimamente se ha extendido la aplicación de los métodos de control activo a numerosos sistemas físicos.

1.3 Control de vibraciones en estructuras

En los últimos años, en ingeniería se ha desarrollado y aprovechado la idea de que el desempeño de las estructuras mecánicas se puede mejorar mediante la aplicación de los métodos de control activo. Las estructuras son comunes en edificios, puentes, grúas, barcos, máquinas, transportadores, vehículos, etc. En estos casos las vibraciones son un problema porque provocan movimientos indeseables, ruido y esfuerzos dinámicos que pueden producir fatiga y falla de la estructura o máquina; aunque también, y quizá más importante, porque implica grandes pérdidas de energía y reducción en el desempeño de las estructuras o máquinas.

En esencia, el control activo permite diseñar estructuras más ligeras que aquellas que no lo utilizan. El resultado de emplear el control activo es que las características de desempeño deseadas se pueden conseguir con el uso del control retroalimentado y prealimentado; esto es, los actuadores ejercen fuerzas a la estructura de acuerdo a la información obtenida de sensores. En contraste, el control pasivo mejora el desempeño de una estructura, mediante el uso de materiales o dispositivos que modifican las propiedades de masa, rigidez y amortiguamiento de la estructura (Meirovitch [10]; Clark, Saunders y Gibbs, 1998 [13]).

DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE UN ABSORBEDOR FLEXIBLE PARA EL CONTROL PASIVO DE VIBRACIONES EN UNA ESTRUCTURA TIPO EDIFICIO

La arquitectura general de una estructura moderna con control activo, algunas veces denominadas estructuras *inteligentes*, se compone de lo siguiente:

- Estructura mecánica.
- Dispositivos de medición: acelerómetros, sensores piezoeléctricos, galgas extensiométricas, etc.
- Dispositivos de actuación: generadores de vibración, materiales magnetoreológicos o electroreológicos, materiales ferroeléctricos y piezoeléctricos, dispositivos electromagnéticos, etc.
- Sistema de monitoreo y control.

De hecho, hay una tendencia para emplear sensores, actuadores y controladores muy sofisticados y costosos, Es común que estos dispositivos se utilicen directamente sobre la estructura sometida a vibraciones. Sin embargo, también es posible agregar más grados de libertad actuados, para resolver el problema de control de vibraciones de una manera eficiente.

Los absorbedores de vibraciones son dispositivos que generan fuerzas inerciales o elásticas, para reducir los niveles de la respuesta producida por el efecto de vibraciones externas (o internas) que afectan a un sistema o estructura mecánica. En la mayoría de los casos, un absorbedor consta de masas adicionales, conectadas mediante elementos elásticos (resortes) y/o amortiguadores (amortiguamiento de tipo viscoso o asociado al material) al sistema o estructura que necesita de protección y ocasionalmente conectadas en forma directa sobre maquinaria rotatoria desbalanceada (fuente endógena de vibraciones). Algunas configuraciones de absorbedores permiten que las masas describan movimientos oscilatorios como en los péndulos (Korenev y Reznikov [6]).

1.4 Planteamiento del problema

Se tiene un oscilador mecánico lineal; el cual, para fines experimentales, puede ser implementado por medio de una estructura flexible-tipo edificio, discretizada en un número finito de grados de libertad; cuya respuesta vibratoria se desea atenuar, para perturbaciones armónicas (ver Fig. 1.1), en donde la frecuencia de excitación será cercana a su frecuencia natural.

DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE UN ABSORBEDOR FLEXIBLE PARA EL CONTROL PASIVO DE VIBRACIONES EN UNA ESTRUCTURA TIPO EDIFICIO

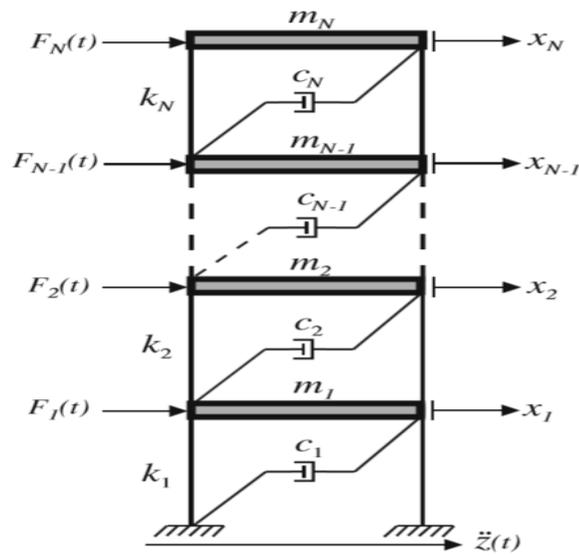


Figura 1.1: Estructura tipo edificio discretizada en N grados de libertad.

Para controlar de manera pasiva la respuesta dinámica resonante del oscilador mecánico, se propone la sintonización de un absorbedor flexible de vibraciones (tipo viga en voladizo con masa puntual en el extremo) en tres configuraciones diferentes (ver fig. 1.2)

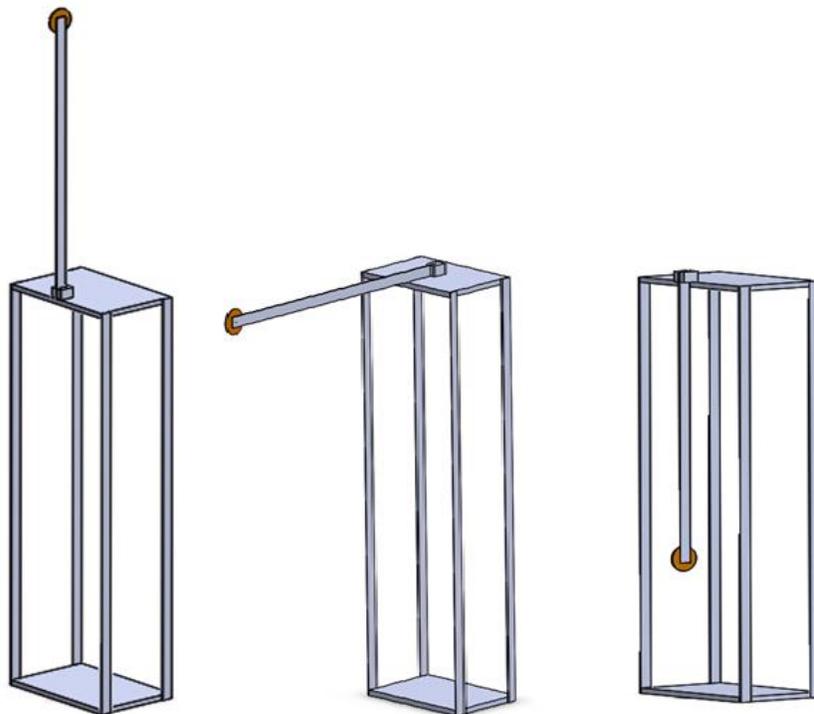


Figura 1.2: Diferentes configuraciones del absorbedor flexible de vibraciones propuestas.

1.5 Justificación

La aplicación de los esquemas de absorción de vibraciones es un tema que permanece abierto, ofreciendo la posibilidad de realizar investigación para aportar nuevos esquemas o mejorar los ya existentes al hacer uso de las herramientas matemáticas actuales y los avances tecnológicos en el área de sensores y actuadores para lograr dicho objetivo.

El campo de aplicación del tema es para estructuras flexibles tipo edificio de un solo piso, ante excitaciones armónicas (cuya frecuencia será cercana a la frecuencia natural); dadas sus ventajas, como son: bajos costos de producción y reducción del peso global, permite ser extendido a otros campos ingenieriles como pueden ser: gabinetes ligeros para electrodomésticos, carrocerías automotrices, fuselajes para la industria aeroespacial, robots de eslabones flexibles, palas y torres de soporte para los aerogeneradores, entre otros.

1.6 Objetivos de la tesis

El objetivo general del presente trabajo de tesis consiste en realizar un estudio comparativo (analítico y experimental) del desempeño dinámico, desde el punto de vista temporal y frecuencial, de un absorbedor flexible de vibraciones en tres configuraciones diferentes en osciladores mecánicos lineales sometidos a perturbaciones armónicas; cuyas frecuencias de excitación sea cercana a la frecuencia natural del sistema primario.

Los objetivos específicos del presente trabajo de tesis son:

- Obtener el modelo dinámico del sistema completo en cada una de las configuraciones propuestas.
- Establecer la condición de sintonización entre el sistema primario y secundario que garantice la absorción de vibraciones.

DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE UN ABSORBEDOR FLEXIBLE PARA EL CONTROL PASIVO DE VIBRACIONES EN UNA ESTRUCTURA TIPO EDIFICIO

- Diseño e integración de la plataforma experimental:
 - a) Diseño de la estructura y componentes mecánicos.
 - b) Instrumentación con acelerómetros de baja potencia.
 - c) Integración con una tarjeta de adquisición de datos entrada-salida tipo *Arduino-Due* basada en el software *Python*.

- Validación experimental del esquema de absorción pasiva de vibraciones propuesto.

1.7 Organización de la tesis

El presente trabajo de tesis se encuentra organizado de la siguiente manera:

*En el capítulo 1 se realiza una introducción general del trabajo, algunos antecedentes sobre la absorción de vibraciones y los objetivos del mismo.

*En el capítulo 2 se presenta el estado del arte o antecedentes de los absorbedores pasivos de vibraciones y se describe en específico el absorbedor flexible como amortiguador dinámico de vibraciones.

*En el capítulo 3 se describe todo lo concerniente a los fundamentos de la dinámica estructural, el análisis modal, el absorbedor lineal de vibraciones (TMD) y el caso especial de un absorbedor no lineal (Sistema autoparamétrico).

*En el capítulo 4 se describen los modelos dinámicos obtenidos para los 3 diferentes arreglos Propuestos, las condiciones de sintonización, resultados en simulación y breves discusiones de los resultados.

*En el capítulo 5 se muestran los resultados obtenidos de manera experimental y se abordan también algunas discusiones de los mismos.

*En el capítulo 6 se abordan las conclusiones de este trabajo de tesis

Por último, se presentan una serie de anexos que contienen planos de los componentes elaborados en SolidWorks; así como artículos publicados cuyo contenido se relaciona con el tema de Tesis.

Capítulo 2

2. ESTADO DEL ARTE O ANTECEDENTES

Una forma común de abordar el problema de control de vibraciones en estructuras, es mediante técnicas pasivas (lineales o no lineales), aprovechando las propiedades físicas del propio sistema, para evitar los efectos indeseables producidos por las vibraciones, se modifican principalmente las propiedades de masa, rigidez y amortiguamiento, con respecto a la configuración inicial de la estructura. Dentro del enfoque de control pasivo lineal, uno de los dispositivos ampliamente utilizado en maquinaria y estructuras civiles es el TMD, dadas sus propiedades como: eficacia, fiabilidad y bajo costo (Sakr, 2015 [14]).

El TMD empezó a ser estudiado a principios del siglo pasado, desde que su conceptualización fue aplicada por primera vez por Frahm (Rao, 2011 [1]).

Los esquemas pasivos son también conocidos como disipadores de energía, reducen el esfuerzo causado por una perturbación externa, como un terremoto. Estos sistemas son caracterizados por la ausencia de una fuente externa de energía. Como resultado, los sistemas de estabilidad general no son considerados. El TMD es un tipo de mecanismo pasivo, diseñado para reducir una frecuencia particular o modo de vibración de una estructura. Este desarrollo se compone de una masa y un elemento elástico, los cuales representan el sistema secundario, instalado en una estructura para minimizar su movimiento, donde la energía de vibración es disipada debido al sistema secundario. Un sistema pasivo TMD es cualquier topología TMD que no contiene un elemento activo; como es un actuador. Como resultado, estos sistemas son puramente mecánicos.

Cuando el TMD es sintonizado cercano al punto estructural de interés, el TMD resonará fuera de fase con la estructura, y la energía de vibración resultante, será disipada. La selección de los parámetros TMD para que coincidan: la frecuencia del amortiguador con la frecuencia natural de la estructura conectada, es el acto de sintonizar el sistema TMD. Sin embargo, para sintonizar apropiadamente el TMD a los modos de excitación fundamental de la estructura instalada, el amortiguador TMD disipará un significativo incremento de la vibración estructural en términos de energía. Un TMD es ventajoso sobre los métodos convencionales de diseño, especialmente para

DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE UN ABSORBEDOR FLEXIBLE PARA EL CONTROL PASIVO DE VIBRACIONES EN UNA ESTRUCTURA TIPO EDIFICIO

construcciones de estructuras ligeras; ya que es económico y puede ser implementado como un complemento para las actuales o nuevas estructuras.

Los sistemas TMD son particularmente utilizados en estructuras como: soportes de puentes o edificios altos, donde las condiciones de resonancia coinciden con las frecuencias de excitación externas. (Laurenco, 2011 [15]).

En la literatura, es posible encontrar varios casos reales relacionados con estructuras de edificios que contienen configuraciones TMD. La torre John Hancock en Boston, fue diseñada con dos amortiguadores, para reducir la respuesta a las cargas por ráfagas de viento. Los amortiguadores se colocaron en extremos opuestos del piso 58, para contrarrestar el movimiento del edificio; tanto lateral como torsional. La torre Chiba Port, fue la primera torre en Japón en ser equipada con un TMD. El propósito del TMD es incrementar el amortiguamiento tanto para el primer modo de las direcciones x e y . Las versiones recientes, emplean un multiensamble de rodamientos de hule elastomérico; los cuales funcionan como resorte de corte y elementos de hule bituminado (BRC, por sus siglas en inglés); los cuales aportan capacidad de amortiguamiento visco elástico. (Connor, 2002 [16]). Hoy en día, un TMD es usado comúnmente en edificios, automóviles y virtualmente, en cualquier sistema donde la supresión de vibraciones es requerida. El desarrollo y utilización de diferentes sistemas topológicos TMD, supera las limitaciones inherentes a los sistemas pasivos TMD, entendiendo como sistema topológico a una estructura matemática que permite la definición formal de conceptos como convergencia, conectividad, continuidad, vecindad, usando subconjuntos de un conjunto dado. Las limitaciones inherentes de desempeño, pueden ser basadas en la robustez de los cambios en la rigidez estructural, las limitaciones en el espacio dentro de la estructura, o el costo y la durabilidad del sistema TMD.

Por otro lado, el estudio del control pasivo de vibraciones usando dispositivos no lineales es un tema interesante, debido a los fenómenos que pueden ocurrir y no ocurren en sus homólogos lineales. Por lo general, un absorbedor de vibraciones no lineal se implementa con el fin de superar posibles inconvenientes debidos al uso de un TMD. Hay una clase de absorbedor no lineal de vibraciones llamados absorbedores autoparamétricos. Este tipo de sistemas no lineales difieren del TMD tradicional, principalmente porque estos tienen un acoplamiento no lineal entre al menos dos modos de vibración, satisfaciendo la llamada condición autoparamétrica (condición de resonancia

DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE UN ABSORBEDOR FLEXIBLE PARA EL CONTROL PASIVO DE VIBRACIONES EN UNA ESTRUCTURA TIPO EDIFICIO

externa e interna), que son ciertamente relacionados con la excitación paramétrica. Los absorbentes autoparamétricos se aplican específicamente donde se está utilizando un sistema primario excitado cerca de una de sus principales resonancias paramétricas; es decir, la peor situación en una estructura física.

Cuando la interacción autoparamétrica ocurre entre dos subsistemas hay una gran transferencia de energía al absorbedor autoparamétrico. Los amortiguadores de vibraciones autoparamétricos han sido diseñados para atenuar las vibraciones resonantes debido a las ventajas que este tipo de sistemas presentan en su función de respuesta de frecuencia, en comparación con el amortiguador de vibraciones clásico (TMD). En Ibrahim y Heo, 1986 [17] y Dahlberg, 1989 [18] se muestra cómo un absorbedor de viga en voladizo continuo con masa puntual, orientado en la misma dirección con el movimiento del sistema primario, puede implementarse con mejores propiedades de atenuación que las obtenidas con TMD clásico. Civalci et al, 1996 [19] definió una región de absorción para un absorbedor de vibraciones autoparamétrico para sistema primario de un solo grado de libertad, bajo excitaciones senoidales y aleatorias.

Ellos determinaron experimentalmente los parámetros que influyen en la eficacia de los absorbedores de vibraciones. Hui y Ng, 2011 [20] presentaron la implementación de fenómenos autoparamétricos para reducir la vibración simétrica de una viga / panel curvo bajo excitación armónica externa que muestra que la transferencia de energía interna de un primer modo simétrico, hacia un primer modo antisimétrico en un panel curvo es un ejemplo del efecto absorbente de vibraciones autoparamétrico. Abundis-Fong et al, 2018 [21] desarrolló un diseño óptimo de un absorbedor autoparamétrico acoplado a un oscilador resonante donde la implementación del absorbedor no lineal se obtuvo usando una aproximación de la función de respuesta de frecuencia no lineal, calculada mediante el método de escalas múltiples.

Recientemente, Ting Tan et al, 2019 [22] utilizó el principio de saturación no lineal y resonancia interna 1:2 en el diseño del amortiguador piezoeléctrico de vibraciones autoparamétrico, para la supresión de vibraciones y recolección de energía.

2.1 La columna colgante como amortiguador dinámico de vibraciones

Los absorbedores de vibraciones dinámicas son importantes para reducir las amplitudes de vibración de estructuras como cables, máquinas, vehículos y edificios. Mucho se ha escrito sobre el tema desde que la teoría fue propuesta por primera vez a principios del siglo XX. Una excelente introducción y una lista de referencias, especialmente trabajos soviéticos, se pueden encontrar en el libro de Korenev y Reznikov [6]. Por lo general, el amortiguador de vibraciones dinámico es un sistema secundario de tipo masa-resorte que altera la amplitud de resonancia del sistema primario. Los amortiguadores de vibraciones de péndulo de gravedad también son utilizados para suprimir las vibraciones de edificios altos durante terremotos, e.g., el rascacielos Taipéi 101. El péndulo con una cuerda pesada fue investigado recientemente por Wang et al, 2017 [23].

En este trabajo, se tiene interés en implementar, desde el punto de vista experimental, viga elástica como amortiguador dinámico de vibraciones en configuración columna colgante (ver Fig. 1.2) Los trabajos previos en esta área incluyen a Jacquot y Foster, 1991 [24] que incluyeron amortiguación y optimización, Snowdon y Nobile, 1980 [25] que hicieron análisis y experimentos en diferentes combinaciones, Yamaguchi, 1985 [26] que agregó amortiguación en varios lugares, Arpaci y Savci, 1987 [27] que adjuntaron una viga en voladizo a una placa, Dahlberg [18] que usó una viga para suprimir la vibración de otra viga y Silva-Navarro [28] y Abundis-Fong [21] quienes agregaron un control activo utilizando un parche piezoeléctrico como actuador.

Capítulo 3

3. MARCO TEÓRICO

3.1 Fundamentos de Dinámica estructural

3.1.1 Dinámica, carga dinámica y respuesta estructural a una carga dinámica.

La dinámica estructural es una parte de la física que estudia el movimiento de las estructuras, en términos de desplazamientos, velocidades y aceleraciones que varían con el tiempo; por lo tanto, incorpora métodos y simplificaciones que describen las respuestas estructurales, a partir del estado de sólo algunos puntos de ellas (enfoque discreto). Sin embargo, también es posible el análisis dinámico de estructuras, considerando un número infinito de puntos en donde se calculen las repuestas dinámicas (enfoque continuo). Por lo tanto, una carga dinámica es aquella cuya magnitud, dirección y/o posición varía con el tiempo (Craig & Kurdila, 2006 [4]).

3.1.2 Grados de libertad

Cualquier movimiento posible de los nodos de los elementos, en una dirección no restringida (toda estructura posee un número infinito de grados de libertad, debido a su continuidad; pero se pueden definir mediante un número finito de grados de libertad; lo que se conoce como enfoque discreto); dado que son variables o parámetros independientes que se requieren para describir la configuración deformada del modelo estructural. A un sistema de un grado de libertad se le denomina SDOF y a uno de múltiples grados de libertad MDOF (Por sus siglas en inglés) (Daniel J. Inman, 2014 [29]).

3.1.3 Vibraciones mecánicas

Se dice que un cuerpo vibra cuando experimenta cambios alternativos, de tal modo que sus puntos oscilen en torno a sus posiciones de equilibrio, sin que el cuerpo cambie de lugar. Como otro concepto de vibración, se puede decir que es un intercambio de energía cinética en cuerpos con rigidez y masa finitas, el cual surge de una entrada de energía dependiente del tiempo. Si un cuerpo o estructura se desplaza de una posición de equilibrio estable, los puntos que conforman

DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE UN ABSORBEDOR FLEXIBLE PARA EL CONTROL PASIVO DE VIBRACIONES EN UNA ESTRUCTURA TIPO EDIFICIO

el cuerpo, tienden a volver a esta posición; al verse afectados por la acción de fuerzas que tienden a restablecer la situación de equilibrio.

Este intercambio de energía puede ser producido por:

- Desequilibrio en máquinas rotatorias (desbalance).
- Entrada de Energía Acústica.
- Circulación de Fluidos o masas (viento).
- Energía Electromagnética.
- Sismos.

Sea cualquiera la causa de la vibración, su reducción es necesaria debido a diversas razones entre las cuales tenemos:

- La excesiva vibración puede limitar la velocidad de procesamiento.
- La vibración es responsable de la pobre calidad de los productos elaborados por máquinas herramientas.
- La vibración de maquinarias puede resultar en radiación de ruido.
- La vibración puede alcanzar a otros instrumentos de precisión de otras fuentes, y causar fallas de funcionamiento.

La medición de vibración, juega un papel muy importante en el desarrollo de técnicas para mitigarla o reducirla, y en el establecimiento de límites en los niveles de ruido de la maquinaria existente en una instalación industrial.

Aproximadamente el 50% de las averías en máquinas rotativas se deben a desalineaciones en los ejes. Las máquinas mal alineadas generan cargas y vibraciones adicionales, causando daños prematuros en rodamientos, obturaciones y acoplamientos, también aumenta el consumo de energía. Gracias a los avances de la electrónica, actualmente se tienen instrumentos de medición altamente sofisticados que permiten cuantificar la vibración de manera precisa, a través de diversos principios.

DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE UN ABSORBEDOR FLEXIBLE PARA EL CONTROL PASIVO DE VIBRACIONES EN UNA ESTRUCTURA TIPO EDIFICIO

Es por esto que es muy importante, un buen entendimiento de los transductores empleados para la medición de vibración, y su interfaz con los sofisticados equipos de instrumentación y de adquisición de datos.

3.1.4 Elementos de un Sistema vibratorio

Un sistema mecánico vibratorio consta de los siguientes elementos (ver Fig. 3.1):

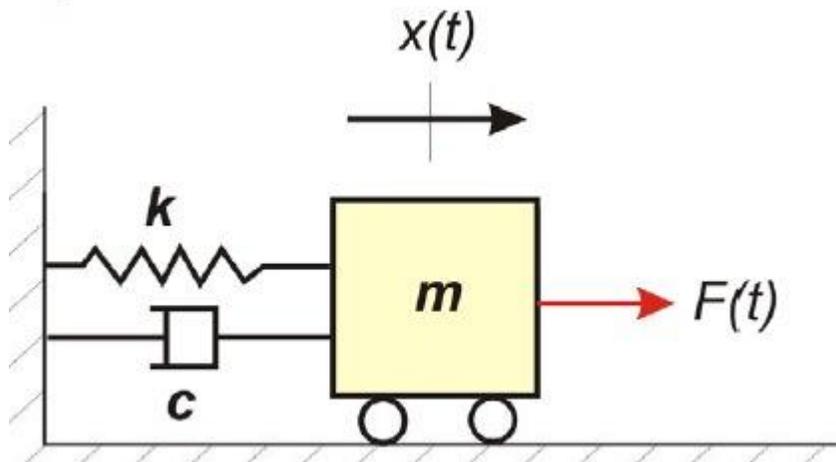


Figura 3.1: Elementos de un sistema vibratorio

Masa o inercia (m). Es un elemento que almacena energía cinética del sistema.

Rigidez (k). Es un elemento que almacena la energía potencial en el sistema.

Amortiguamiento o fricción (c). Es un elemento disipador de la energía en el sistema.

Fuente de energía ($F(t)$). Es el medio que excita la dinámica natural o forzada del sistema vibratorio.

Desplazamiento o grado de libertad ($x(t)$)

3.1.5 Tipos de excitación dinámica

- a) Equipos mecánicos.
- b) Impacto.
- c) Explosiones.

DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE UN ABSORBEDOR FLEXIBLE PARA EL CONTROL PASIVO DE VIBRACIONES EN UNA ESTRUCTURA TIPO EDIFICIO

d) Viento.

e) Olas.

f) Sismos.

3.1.6 Supresión de vibraciones

a) Aislamiento.

b) Modificación.

c) Control:

- Control pasivo. -No requiere de una fuente de energía externa para su funcionamiento
- Control semi-activo o totalmente activo. -Las vibraciones se atenúan por la aplicación de una fuerza externa (implementada por una ley de control), que se calcula a partir de la variable, sin disipar energía por medio de soportes elásticos.

3.2 Análisis modal

Técnica para determinar las características dinámicas del sistema; tales como: frecuencias naturales, formas modales y razones de amortiguamiento; para así utilizarlos para formular un modelo matemático que represente su comportamiento dinámico. Puede ser:

a). -Teórico. -Se basa en técnicas analíticas o simulaciones, consiste en plantear la ecuación de movimiento, suponer una forma de la respuesta e imponer que ésta cumpla la ecuación que gobierna el movimiento del sistema. Lo que supone, resolver un problema de auto valores y auto vectores.

b). -Experimental. - Se basa en ensayos y tiene 4 pasos fundamentales:

*Excitación de la estructura, mediante perturbaciones conocidas.

*Medición de datos usando sensores adecuados.

*Tratamiento digital.

*Análisis de las señales y aplicación de modelos.

DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE UN ABSORBEDOR FLEXIBLE PARA EL CONTROL PASIVO DE VIBRACIONES EN UNA ESTRUCTURA TIPO EDIFICIO

Recientemente, se están desarrollando los métodos de análisis modal operacional (OMA, por sus siglas en inglés); con las cuales, la función de respuesta frecuencial, identificación de los parámetros modales y modificación modal, se realiza únicamente a partir de mediciones de las salidas del sistema; sin conocer ni medir las entradas que las producen (por ejemplo, aerogeneradores, edificios, puentes, aviones, etc.).

Es importante mencionar que mediante una técnica matemática denominada Transformada Rápida de Fourier (FFT, por sus siglas en inglés), se puede pasar del dominio del tiempo al dominio de la frecuencia; por lo tanto, se puede usar o implementar para obtener la Función de Respuesta Frecuencial (FRF, por sus siglas en inglés) del sistema bajo estudio. Dicha FRF es la base de las técnicas de análisis modal clásicas.

Para el OMA, existen 3 tipos de modelos:

1.-Físicos, son prototipos o modelos a escala.

Cuando el sistema no existe o no se tiene acceso:

2.-Analíticos; existen 2 tipos:

a). -Modelos continuos de masas concentradas

b). -Modelos con parámetros discretos

Craig y Kurdila, 2006 [4] aportaron sobre los modelos analíticos:

Son un conjunto de suposiciones o hipótesis simplificadoras que reducen el sistema real a un sistema analítico. Los modelos analíticos se ilustran mediante un conjunto de esquemas.

3.-Matemáticos, el planteamiento y solución describen en lenguaje matemático o numérico el movimiento del modelo analítico.

Es importante hacer notar que la respuesta real puede diferir de la calculada del modelo analítico; dependiendo entre otros factores de la fidelidad del mismo modelo, de las hipótesis planteadas, de los valores de los parámetros empleados, del modelo de las ecuaciones, etc. Un modelo continuo, conduce a ecuaciones diferenciales parciales; mientras que uno discreto, conduce a ecuaciones diferenciales ordinarias.

DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE UN ABSORBEDOR FLEXIBLE PARA EL CONTROL PASIVO DE VIBRACIONES EN UNA ESTRUCTURA TIPO EDIFICIO

En un sistema elástico lineal, la relación entre la fuerza aplicada y el correspondiente desplazamiento, se mantiene lineal; aun para deformaciones grandes y las curvas de carga y descarga son iguales; es decir, que no hay deformaciones permanentes (De la Colina, Valdez & González, 2016 [30]).

Un sistema puede ser modelado y caracterizado vía la formulación Euler-Lagrange, métodos del elemento finito o por técnicas experimentales de análisis modal.

3.3 Absorbedor lineal de vibraciones (TMD)

Un TMD es un dispositivo mecánico que se agrega a otro sistema mecánico, a menudo llamado sistema primario, con el fin de atenuar vibraciones no deseadas introduciendo fuerzas dinámicas iguales y opuestas o mediante dispositivos amortiguadores para disipar la energía. Su efectividad depende de la cercanía de la frecuencia natural del absorbedor a la frecuencia de excitación. Básicamente, un TMD convencional consiste de una sola masa conectada a la estructura principal por un resorte lineal y un amortiguador viscoso. Por lo tanto, el modelo más representativo de una estructura con TMD es un sistema de dos grados de libertad, cuya dinámica vibratoria se describe mediante las dos ecuaciones diferenciales ordinarias acopladas.

$$m_1\ddot{x}_1 + c_1\dot{x}_1 + (k_1 + k_a)x_1 - k_ax_2 = F(t) \quad (3.1)$$

$$m_a\ddot{x}_2 + c_a\dot{x}_2 - k_a(x_1 + x_2) = 0 \quad (3.2)$$

donde m_1 , c_1 y k_1 representan los parámetros de masa, amortiguación y rigidez del sistema primario. Los parámetros del TMD se indican mediante m_a , c_a y k_a . La fuerza armónica se describe por $F(t) = F_0 \text{sen} \Omega t$, $F(t)$ con amplitud F_0 y frecuencia de excitación Ω . Para un sistema primario con un solo grado de libertad, es posible sintonizar un TMD para controlar pasivamente el primer modo de vibración resonante [21]. En general, los parámetros de diseño del amortiguador de vibraciones (m_a y k_a) deben seleccionarse cuando su frecuencia natural de desacoplamiento ω_{n2} está cerca de la frecuencia de la fuerza de excitación Ω , esto es,

$$\omega_{n2} = \sqrt{\frac{k_a}{m_a}} \quad (3.3)$$

De esta manera, la supresión pasiva de la fuerza de excitación armónica se puede realizar. Además, para un sistema primario realista tenemos que $c_1 > 0$, la estabilidad asintótica global puede por lo tanto ser lograda por el dispositivo de control de vibración pasivo [17]. Se puede añadir amortiguación viscosa adicional correctamente en un absorbedor de vibración pasivo, para aumentar la banda de atenuación alrededor de su frecuencia de sintonización. De este modo se puede mejorar la robustez frente a variaciones en la frecuencia de excitación Ω .

3.4 Absorbedor de vibraciones no lineal: sistema autoparamétrico

Un absorbedor de vibraciones pasivo funcional extrae energía oscilatoria del sistema primario. Este tipo de transferencia de energía está bien establecido en la vibración autoparamétrica. En el caso más simple, un sistema autoparamétrico se puede pensar en dos partes, la primera es un oscilador forzado excitado externamente y el segundo comprende un oscilador paramétrico (un término aparece como una modificación en la variación de tiempo de un parámetro del sistema) excitado por la respuesta del elemento forzado.

El acoplamiento entre modos de vibración (dos o más) es el requisito fundamental de un sistema autoparamétrico, de tal manera que las relaciones de respuesta puedan aplicarse entre las frecuencias naturales y también la frecuencia de excitación externa [23]. Un sistema autoparamétrico se puede modelar en un sentido general (considerando dos grados de libertad) por las siguientes ecuaciones normalizadas de movimiento:

$$\ddot{x} + 2\zeta_1\omega_1\dot{x} + \omega_1^2x - \varepsilon\mu(\dot{y}^2 + y\ddot{y}) = F_0\text{sen}\Omega t \quad (3.4)$$

$$\ddot{y} + 2\zeta_2\omega_2\dot{y} + \omega_2^2y - \varepsilon\ddot{x}y = 0 \quad (3.5)$$

donde x e y son los grados de libertad asociados con el sistema primario y el absorbedor autoparamétrico, respectivamente. El acoplamiento entre las ecuaciones (3.4) y (3.5) es evidente en los términos $\varepsilon\mu(\dot{y}^2 + y\ddot{y})$ y $\varepsilon\ddot{x}y$ donde $\varepsilon\mu$ y ε son constantes relacionadas con las propiedades del absorbente no lineal que deben considerarse; así como la masa equivalente presente en el sistema completo. Es importante señalar que (3.5) es claramente una ecuación de tipo paramétrico donde \ddot{x} actúa como un coeficiente de la coordenada y .

DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE UN ABSORBEDOR FLEXIBLE PARA EL CONTROL PASIVO DE VIBRACIONES EN UNA ESTRUCTURA TIPO EDIFICIO

Por otro lado, según la condición de sintonización entre un absorbedor de vibración autoparamétrica y un oscilador mecánico, las siguientes expresiones deben ser satisfechas (para más detalles ver [21]).

$$\Omega = \omega_1 \quad (3.6)$$

$$\omega_1 = 2\omega_2 \quad (3.7)$$

donde Ω es la frecuencia de excitación, ω_1 es la frecuencia natural del sistema principal y ω_2 corresponde a la frecuencia natural del sistema secundario. Las ecuaciones (3.6) y (3.7) se conocen como condiciones de resonancia externa e interna, respectivamente [21].

Básicamente, la característica principal de la resonancia autoparamétrica es la transferencia de energía cuando la frecuencia del modo más bajo es igual a la mitad de la frecuencia del modo superior (ver (3.6) y (3.7)). Porque la transferencia de energía en el modo más bajo podría resultar en un crecimiento de energía exponencial y puede actuar como un absorbedor de vibraciones al modo superior.

3.5 Modelo dinámico de una estructura tipo edificio de 1 gdl, sin absorbedor de vibraciones

En la fig. 3.2 se muestra el diagrama esquemático de un sistema masa resorte amortiguador de 1 gdl con movimiento en la base y perturbado por una fuerza de excitación $p(t)$.

DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE UN ABSORBEDOR FLEXIBLE PARA EL CONTROL PASIVO DE VIBRACIONES EN UNA ESTRUCTURA TIPO EDIFICIO

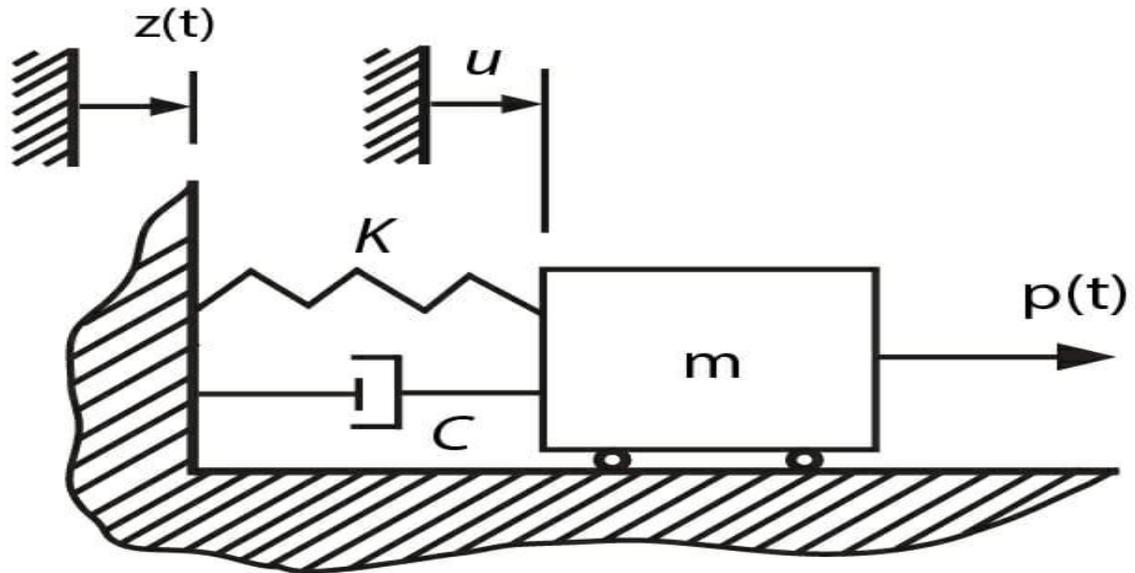


Figura 3.2: Sistema masa resorte amortiguador de 1 gdl con movimiento en la base.

Haciendo el diagrama de cuerpo libre y cinético (ver Figura 3.3), se tiene:

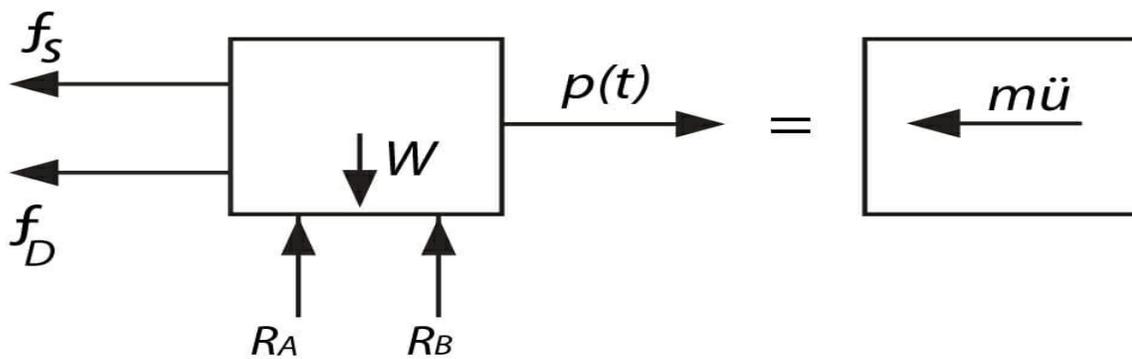


Figura 3.3. Diagrama de cuerpo libre y cinético del sistema

Aplicando la segunda ley de Newton

$$\rightarrow + \sum F_x = m\ddot{u}$$

$$p(t) - f_s - f_D = m\ddot{u}$$

Sabemos que

$$f_s = K(u - z)$$

$$f_D = C(\dot{u} - \dot{z})$$

Sustituyendo y acomodando la ecuación

$$m\ddot{u} + C(\dot{u} - \dot{z}) + K(u - z) = p(t)$$

DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE UN ABSORBEDOR FLEXIBLE PARA EL CONTROL PASIVO DE VIBRACIONES EN UNA ESTRUCTURA TIPO EDIFICIO

Desarrollando los productos y reacomodando la ecuación

$$m\ddot{u} + C\dot{u} + Ku = C\dot{z} + Kz + p(t) \quad (3.8)$$

La ecuación (3.8) describe el movimiento de la masa relativo al movimiento de la base.

Si $w = u - z$, es el desplazamiento de la masa relativo al movimiento de la base y se deriva dos veces con respecto al tiempo, resulta

$$u = w + z$$

$$\dot{u} = \dot{w} + \dot{z}$$

$$\ddot{u} = \ddot{w} + \ddot{z}$$

Sustituyendo en la ecuación (3.8)

$$m(\ddot{w} + \ddot{z}) + C(\dot{w} + \dot{z}) + K(w + z) = C\dot{z} + Kz + p(t)$$

Desarrollando los productos y reduciendo términos semejantes

$$m\ddot{w} + m\ddot{z} + C\dot{w} + C\dot{z} + Kw + Kz = C\dot{z} + Kz + p(t)$$

$$m\ddot{w} + C\dot{w} + Kw = p(t) - m\ddot{z}$$

Para nuestro caso particular $p(t) = 0$

$$m\ddot{w} + C\dot{w} + Kw = -m\ddot{z} \quad (3.9)$$

Existen bastantes aplicaciones donde la ecuación (3.9) es más utilizada que la ecuación (3.8), dado que el movimiento relativo puede ser más importante que el movimiento absoluto; ya que es mucho más fácil de medir la aceleración de la base (\ddot{z}) que la velocidad o desplazamiento de la misma.

Capítulo 4

4. MATERIALES Y MÉTODOS

En este capítulo se desarrollan los modelos dinámicos con sus respectivas simulaciones numéricas de dos tipos de absorbedores pasivos de vibraciones con la intención de que sirvan como punto de partida para el diseño y síntesis del absorbedor flexible que se piensa implementar. El primero es un TMD y el segundo es un absorbedor autoparamétrico, ambos esquemas de absorción se analizan para una estructura tipo edificio discretizada en un grado de libertad.

4.1 Modelo dinámico del sistema

La Fig. 4.1 muestra el diagrama esquemático de una estructura tipo edificio de un piso, acoplado a un absorbedor de vibraciones tipo viga en voladizo configurado para que trabaje como TMD. El sistema primario consiste de una masa m_1 interconectada con la base por cuatro columnas flexibles las cuales proporcionan la rigidez equivalente del sistema principal k . La base de la estructura es directamente afectada por una aceleración $\ddot{z}(t) = -Z\omega^2 \text{sen}\Omega t$ con amplitud $Z\Omega^2$ y frecuencia de excitación Ω .

El sistema mostrado en la Fig. 4.1 se puede abordar como si se tratara de dos osciladores mecánicos acoplados entre ellos por medio de un elemento elástico (ver Fig. 4.2).

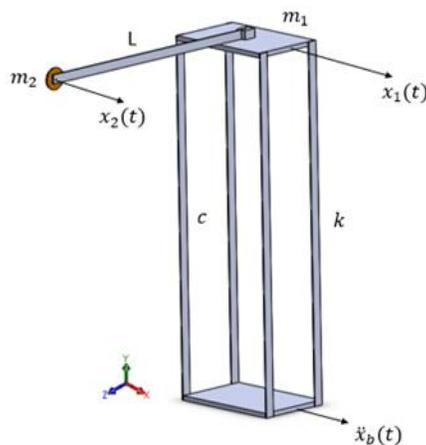


Figura 4.1: Diagrama esquemático del sistema primario con TMD.

DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE UN ABSORBEDOR FLEXIBLE PARA EL CONTROL PASIVO DE VIBRACIONES EN UNA ESTRUCTURA TIPO EDIFICIO

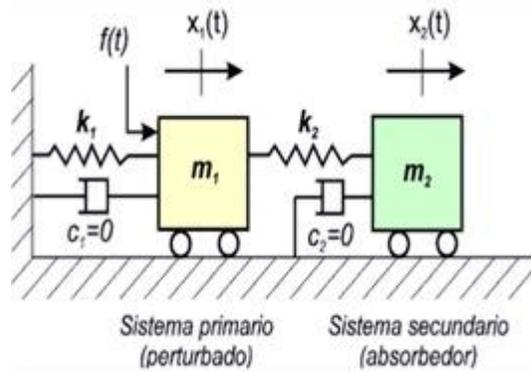


Fig. 4.2: Diagrama equivalente del sistema primario con TMD.

Para obtener el modelo dinámico del sistema se plantea el Lagrangiano (L) (en un primer análisis, se considera $c_1 = c_2 = 0$) donde los grados de libertad considerados son los desplazamientos asociados a cada una de las masas (x_1, x_2):

$$L = T - V \quad (4.1)$$

donde:

T = Energía cinética total en el sistema.

V = Energía potencial total en el sistema.

La energía cinética total del sistema está dada por:

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 \quad (4.2)$$

donde m_1 es la masa del sistema primario (estructura) y m_2 es la masa del sistema secundario (absorbedor).

La energía potencial total del sistema es:

$$V = \frac{1}{2} k_1 x_1^2 + \frac{1}{2} k_2 (x_2 - x_1)^2 \quad (4.3)$$

donde k_1 es la rigidez del sistema primario (asociada a las columnas del sistema) y k_2 la del secundario (asociada a la viga en voladizo).

Desarrollando el cuadrado del binomio y efectuando el producto indicado en el segundo término, se obtiene:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2} k_1 x_1^2 + \frac{1}{2} k_2 (x_2^2 - 2x_1 x_2 + x_1^2) \\ V &= \frac{1}{2} k_1 x_1^2 + \frac{1}{2} k_2 x_2^2 - k_2 x_1 x_2 + \frac{1}{2} k_2 x_1^2 \end{aligned} \quad (4.4)$$

DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE UN ABSORBEDOR FLEXIBLE PARA EL CONTROL PASIVO
DE VIBRACIONES EN UNA ESTRUCTURA TIPO EDIFICIO

Sustituyendo las ecuaciones (4.2) y (4.4) en la ecuación (4.1) se obtiene:

$$L = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 - [\frac{1}{2} k_1 x_1^2 + \frac{1}{2} k_2 x_2^2 - k_2 x_1 x_2 + \frac{1}{2} k_2 x_1^2]$$

suprimiendo el paréntesis, resulta

$$L = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 - \frac{1}{2} k_1 x_1^2 - \frac{1}{2} k_2 x_2^2 + k_2 x_1 x_2 - \frac{1}{2} k_2 x_1^2 \quad (4.5)$$

Se aplica el formulismo de Euler-Lagrange para obtener las ecuaciones del modelo dinámico del sistema (con $i = 1,2$)

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \tau$$

donde τ es el vector de fuerzas externas

para la coordenada generalizada $q_1 = x_1$, resulta

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} &= m_1 \dot{x}_1 \\ \frac{d}{dt} (m_1 \dot{x}_1) &= m_1 \ddot{x}_1 \\ \frac{\partial L}{\partial x_1} &= -k_1 x_1 - k_2 x_1 + k_2 x_2 \\ m_1 \ddot{x}_1 - (-k_1 x_1 - k_2 x_1 + k_2 x_2) &= f(t) \\ m_1 \ddot{x}_1 + k_1 x_1 + k_2 x_1 - k_2 x_2 &= f(t) \end{aligned} \quad (4.6)$$

para la coordenada generalizada $q_2 = x_2$, resulta

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} &= m_2 \dot{x}_2 \\ \frac{d}{dt} (m_2 \dot{x}_2) &= m_2 \ddot{x}_2 \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} &= k_2 x_1 - k_2 x_2 \\ m_2 \ddot{x}_2 - (k_2 x_1 - k_2 x_2) &= 0 \\ m_2 \ddot{x}_2 - k_2 x_1 + k_2 x_2 &= 0 \end{aligned} \quad (4.7)$$

el modelo dinámico del sistema está dado por las ecuaciones (4.6) y (4.7)

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + k_1 x_1 + k_2 x_1 - k_2 x_2 &= f(t) \\ m_2 \ddot{x}_2 - k_2 x_1 + k_2 x_2 &= 0 \end{aligned}$$

DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE UN ABSORBEDOR FLEXIBLE PARA EL CONTROL PASIVO
DE VIBRACIONES EN UNA ESTRUCTURA TIPO EDIFICIO

factorizando x_1 en la ecuación (4.6) y suponiendo una fuerza armónica, tenemos

$$m_1\ddot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2x_2 = F \text{ sen } \omega t \quad (4.8)$$

$$m_2\ddot{x}_2 - k_2x_1 + k_2x_2 = 0 \quad (4.9)$$

El modelo dinámico del sistema dado por las ecuaciones (4.8) y (4.9) se puede representar en forma vectorial matricial, de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \text{ sen } \omega t \\ 0 \end{bmatrix}$$

4.1.1 Condición de Sintonización de un absorbedor de masa sintonizado

Se tiene interés en la solución en estado estable del sistema (x_p). Para obtener las amplitudes del sistema primario y secundario, se utilizará el método de los coeficientes indeterminados; para lo cual, se supone respuesta armónica, en ambos grados de libertad, de la siguiente forma

$$x_1(t) = A \text{ sen } \omega t$$

$$\ddot{x}_1(t) = -A\omega^2 \text{ sen } \omega t$$

$$x_2(t) = B \text{ sen } \omega t$$

$$\ddot{x}_2(t) = -B\omega^2 \text{ sen } \omega t$$

Sustituyendo en el modelo dinámico, resulta:

$$m_1(-A\omega^2 \text{ sen } \omega t) + (k_1 + k_2)(A \text{ sen } \omega t) - k_2(B \text{ sen } \omega t) = F \text{ sen } \omega t$$

$$m_2(-B\omega^2 \text{ sen } \omega t) - k_2(A \text{ sen } \omega t) + k_2(B \text{ sen } \omega t) = 0$$

Dividiendo entre $\text{sen } \omega t$

$$m_1(-A\omega^2) + (k_1 + k_2)(A) - k_2B = F \quad (4.10)$$

$$m_2(-B\omega^2) - k_2(A) + k_2B = 0 \quad (4.11)$$

de la ecuación (4.11), se obtiene

$$(k_2 - m_2\omega^2)B - k_2A = 0$$

DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE UN ABSORBEDOR FLEXIBLE PARA EL CONTROL PASIVO
DE VIBRACIONES EN UNA ESTRUCTURA TIPO EDIFICIO

En el caso ideal $A = 0$ (cancelación de las oscilaciones en el sistema primario), por lo tanto

$$(k_2 - m_2\omega^2)B = 0$$

Finalmente, la condición de sintonización del TMD es:

$$k_2 - m_2\omega^2 = 0$$

$$\omega^2 = \frac{k_2}{m_2} \quad (4.12)$$

acomodando la ecuación (4.10)

$$-m_1\omega^2 A + (k_1 + k_2)(A) - k_2(B) = F$$

factorizando A

$$(k_1 + k_2 - m_1\omega^2)A - k_2B = F \quad (4.13)$$

factorizando B en la ecuación (4.11)

$$-k_2A + (k_2 - m_2\omega^2)B = 0 \quad (4.14)$$

despejando B de la ecuación (4.14)

$$(k_2 - m_2\omega^2)B = k_2A$$

$$B = \frac{k_2A}{k_2 - m_2\omega^2} \quad (4.15)$$

sustituyendo la ecuación (4.15) en la ecuación (4.13)

$$(k_1 + k_2 - m_1\omega^2)A - k_2\left(\frac{k_2A}{k_2 - m_2\omega^2}\right) = F$$

Factorizando A, despejando y acomodando términos

$$A\left(k_1 + k_2 - m_1\omega^2 - \frac{k_2^2}{k_2 - m_2\omega^2}\right) = F$$

$$A = \frac{F}{k_1 + k_2 - m_1\omega^2 - \frac{k_2^2}{k_2 - m_2\omega^2}}$$

$$A = \frac{(k_2 - m_2\omega^2)F}{(k_1 + k_2 - m_1\omega^2)(k_2 - m_2\omega^2) - k_2^2} \quad (4.16)$$

DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE UN ABSORBEDOR FLEXIBLE PARA EL CONTROL PASIVO DE VIBRACIONES EN UNA ESTRUCTURA TIPO EDIFICIO

Sustituyendo la ecuación (4.16) en la ecuación (4.15) se obtiene el valor de B

$$B = \frac{k_2 \left(\frac{(k_2 - m_2 \omega^2) F}{(k_1 + k_2 - m_1 \omega^2)(k_2 - m_2 \omega^2) - k_2^2} \right)}{k_2 - m_2 \omega^2}$$

$$B = \frac{k_2 F}{(k_1 + k_2 - m_1 \omega^2)(k_2 - m_2 \omega^2) - k_2^2} \quad (4.17)$$

donde A y B son las amplitudes de vibración en estado estable del sistema primario y secundario, respectivamente.

4.1.2 Resultados en simulación

Con la intención de mostrar la interacción dinámica que existe entre el sistema primario (estructura tipo edificio discretizada en 1 gdl) y un absorbedor pasivo de vibraciones tipo TMD (ver Fig. 4.1) se realizaron simulaciones numéricas usando Matlab-Simulink.

Los parámetros del sistema completo se muestran en la Tabla 4.1. La rigidez equivalente asociada al (primer modo) absorbedor tipo viga en cantilever es tal que dicho absorbedor lineal esté propiamente sintonizado con la frecuencia de la fuerza de excitación (ver ecuación (4.12)).

Tabla 4.1 Parámetros del sistema con TMD.

$m_1 = 1.5 \text{ kg}$	$k_1 = 200 \text{ N/m}$	$c_1 = 1 \text{ Ns/m}$
$\omega_n = 1.75 \text{ Hz}$	$m_2 = 0.15 \text{ kg}$	$k_2 = 18.18 \text{ N/m}$
$c_2 \approx 0 \text{ Ns/m}$	$F_0 = 1.5 \text{ N}$	$\Omega = 1.75 \text{ Hz}$

La respuesta en el dominio del tiempo del grado de libertad asociado al desplazamiento lateral de la estructura tipo edificio sin y con absorbedor tipo viga configurado como TMD se muestra en la Fig. 4.3. Es evidente que el porcentaje de absorción es significativo (cercano al 95%) cuando se utiliza un absorbedor pasivo de vibraciones de este tipo.

La Fig. 4.4 muestra la Función de Respuesta Frecuencial del sistema primario, sin y con TMD ante un barrido sinusoidal de 0 a 5 Hz con amplitud constante. Se observa que la amplitud del sistema principal disminuye considerablemente en la frecuencia de diseño del sistema secundario

DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE UN ABSORBEDOR FLEXIBLE PARA EL CONTROL PASIVO DE VIBRACIONES EN UNA ESTRUCTURA TIPO EDIFICIO

($\omega_n = 1.75 \text{ Hz}$) pero se tiene la desventaja de que se genera un par de valores críticos de frecuencia alrededor de la condición de sintonización.

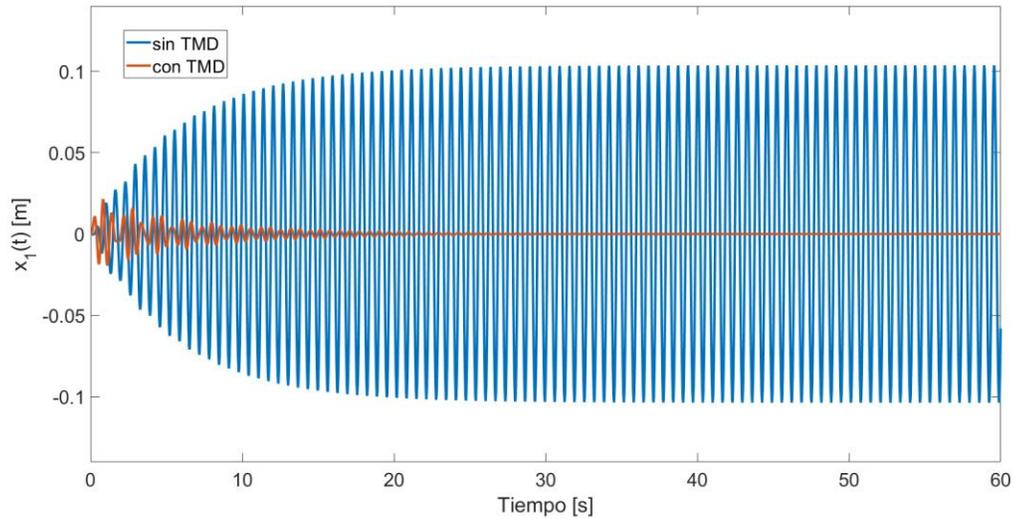


Figura 4.3. Respuesta dinámica del sistema primario sin y con TMD.

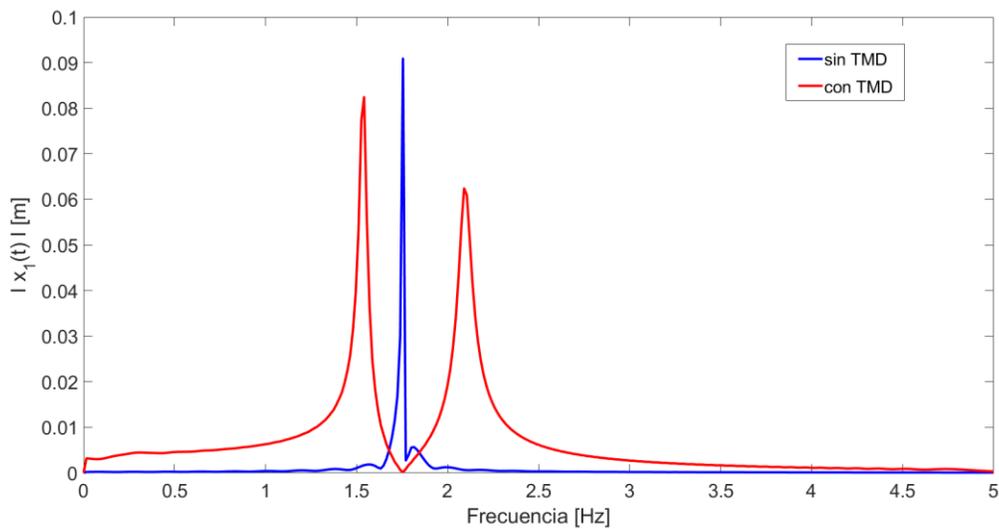


Fig. 4.4. Función de Respuesta Frecuencial del sistema primario sin y con TMD.

La respuesta temporal del sistema secundario (TMD) cuando este se encuentra sintonizado con la frecuencia de excitación Ω se muestra en la Fig. 4.5 donde la amplitud en estado estable es $x_2(t) = 8.3 \text{ cm}$.

DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE UN ABSORBEDOR FLEXIBLE PARA EL CONTROL PASIVO DE VIBRACIONES EN UNA ESTRUCTURA TIPO EDIFICIO

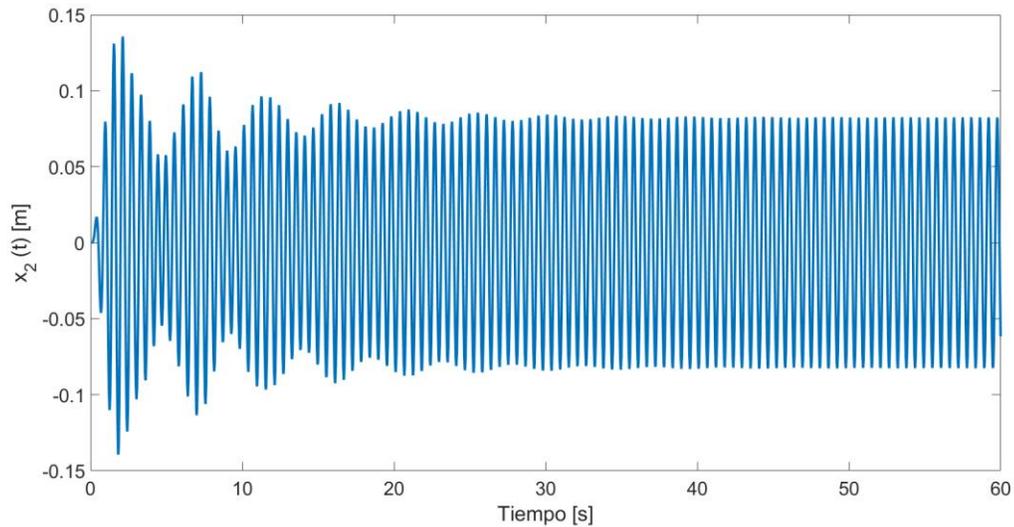


Fig. 4.5. Respuesta dinámica del sistema secundario configurado como TMD.

4.2 Modelo dinámico del sistema utilizando un absorbedor autoparamétrico.

La Fig. 4.6 muestra el diagrama esquemático de la estructura tipo edificio con un absorbedor de vibraciones no lineal tipo autoparamétrico. El grado de libertad asociado al sistema secundario (y) es un movimiento lateral que acontece en un plano horizontal (i.e., no se consideran efectos gravitatorios).

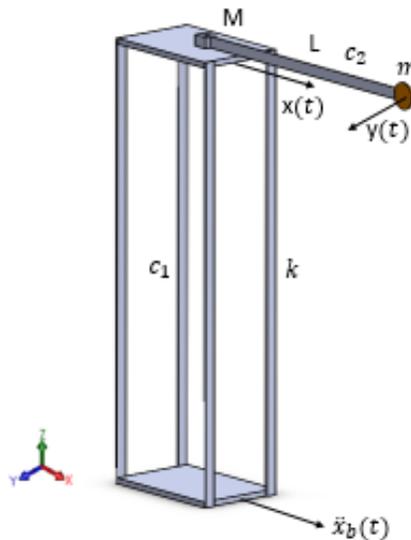


Figura 4.6. Diagrama esquemático del sistema primario con absorbedor autoparamétrico.

DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE UN ABSORBEDOR FLEXIBLE PARA EL CONTROL PASIVO DE VIBRACIONES EN UNA ESTRUCTURA TIPO EDIFICIO

Las ecuaciones de movimiento del sistema discretizado en dos grados de libertad se obtienen utilizando la formulación de *Euler-Lagrange*. Las energías cinética y potencial totales del sistema están dadas por

$$T = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{w} - \dot{x})^2$$

$$V = \frac{1}{2}kx^2 + \left[\frac{3EI}{2L^3}\right]y^2$$

donde $w = 3y^2/5L$ representa un desplazamiento axial (contracción) de la masa m a través de la dirección x , el cual está directamente relacionado con el desplazamiento lateral y de la misma masa. Es importante notar que la energía potencial solo se debe a energía de deformación por flexión.

El modelo dinámico del sistema completo se obtiene calculando el Lagrangiano del sistema ($L = T - V$) y aplicando la ecuación de Euler-Lagrange para $q_1 = x$ y $q_2 = y$, considerando una perturbación externa $F(t)$ en la base de la estructura, como sigue:

$$\dot{w} = \frac{dw}{dt}$$

$$\dot{w} = \frac{d\left(\frac{3y^2}{5L}\right)}{dt}$$

$$\dot{w} = \frac{6y\dot{y}}{5L}$$

desarrollando el binomio al cuadrado

$$(\dot{w} - \dot{x})^2 = (6y\dot{y}/5L - \dot{x})^2$$

$$(\dot{w} - \dot{x})^2 = \frac{36y^2\dot{y}^2}{25L^2} - \frac{12y\dot{y}\dot{x}}{5L} + \dot{x}^2$$

sustituyendo en la ecuación de la energía cinética y desarrollando la multiplicación

$$T = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + \frac{1}{2}m\left(\frac{36y^2\dot{y}^2}{25L^2} - \frac{12y\dot{y}\dot{x}}{5L} + \dot{x}^2\right)$$

$$T = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + \frac{18my^2\dot{y}^2}{25L^2} - \frac{6my\dot{y}\dot{x}}{5L} + \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE UN ABSORBEDOR FLEXIBLE PARA EL CONTROL PASIVO
DE VIBRACIONES EN UNA ESTRUCTURA TIPO EDIFICIO

factorizando donde proceda

$$T = \frac{\dot{x}^2}{2}(M + m) - \frac{6my\dot{y}\dot{x}}{5L} + \dot{y}^2\left(\frac{m}{2} + \frac{18my^2}{25L^2}\right)$$

Calculando el Lagrangiano ($L = T - V$)

$$L = \frac{\dot{x}^2}{2}(M + m) - \frac{6my\dot{y}\dot{x}}{5L} + \dot{y}^2\left(\frac{m}{2} + \frac{18my^2}{25L^2}\right) - \left(\frac{1}{2}kx^2 + \left[\frac{3EI}{2L^3}\right]y^2\right)$$

$$L = \frac{\dot{x}^2}{2}(M + m) - \frac{6my\dot{y}\dot{x}}{5L} + \dot{y}^2\left(\frac{m}{2} + \frac{18my^2}{25L^2}\right) - \frac{1}{2}kx^2 - \left[\frac{3EI}{2L^3}\right]y^2$$

Aplicando la ecuación de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = \tau$$

Para $q_1 = x$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{d}{dt}\left[(M + m)\dot{x} - \frac{6my\dot{y}}{5L}\right]$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = (M + m)\ddot{x} - \frac{6m}{5L}(y\ddot{y} + \dot{y}^2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{1}{2}kx^2\right) = -kx$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = (M + m)\ddot{x} - \frac{6m}{5L}(y\ddot{y} + \dot{y}^2) - (-kx) = f(x)$$

$$(M + m)\ddot{x} + c_1\dot{x} + kx - \frac{6m}{5L}(y\ddot{y} + \dot{y}^2) = F(t) \quad (4.18)$$

Para $q_2 = y$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) = \frac{d}{dt}\left[-\frac{6m}{5L}y\dot{x} + 2\dot{y}\left(\frac{25mL^2 + 36my^2}{50L^2}\right)\right]$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) = -\frac{6m}{5L}(y\ddot{x} + \dot{x}\dot{y}) + \dot{y}\left(m + \frac{36my^2}{25L^2}\right)$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = -\frac{6m}{5L}\dot{x}\dot{y} - \frac{36m\dot{y}^2}{25L^2} - \frac{3EIy}{L^3}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = -\frac{6m}{5L}(y\ddot{x} + \dot{x}\dot{y}) + \dot{y}\left(m + \frac{36my^2}{25L^2}\right) - \left(-\frac{6m}{5L}\dot{x}\dot{y} - \frac{36m\dot{y}^2}{25L^2} - \frac{3EIy}{L^3}\right)$$

$$= -\frac{6m}{5L}(y\ddot{x} + \dot{x}\dot{y}) + \dot{y}\left(m + \frac{36my^2}{25L^2}\right) + \frac{6m}{5L}\dot{x}\dot{y} + \frac{36m\dot{y}^2}{25L^2} + \frac{3EIy}{L^3}$$

$$= -\frac{6m}{5L}y\ddot{x} + \dot{y}m + \frac{36m}{25L^2}(y\dot{y} + \dot{y}^2) + \frac{3EIy}{L^3}$$

$$m\ddot{y} + \left(\frac{3EI}{L^3} - \frac{6m}{5L}\ddot{x}\right)y + c_2\dot{y} + \frac{36m}{25L^2}y(y\dot{y} + \dot{y}^2) = 0 \quad (4.19)$$

DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE UN ABSORBEDOR FLEXIBLE PARA EL CONTROL PASIVO DE VIBRACIONES EN UNA ESTRUCTURA TIPO EDIFICIO

donde x , y representan el movimiento longitudinal del sistema primario y el desplazamiento lateral del sistema secundario, respectivamente. Además, los parámetros asociados con el absorbedor autoparamétrico tipo viga en cantilever son el módulo de elasticidad E (aluminio), el momento de inercia de área I , y la longitud total L .

Es importante notar que el modelo dinámico descrito por (4.18) y (4.19) es altamente no lineal donde el absorbedor autoparamétrico está acoplado inercialmente al sistema primario de tal manera que una sintonización adecuada puede conducir a la condición autoparamétrica (interacción dinámica entre dos modos de vibración) de tal forma que se pueda atenuar la respuesta temporal de la estructura tipo edificio.

En resumen, el absorbedor de vibraciones no lineal está colocado en la masa principal del oscilador mecánico lineal orientado a lo largo del eje x de tal manera que su soporte se mueve en la misma dirección. La sección transversal de la viga también se coloca de manera tal que pueda producir un movimiento de flexión en el eje y (ortogonal al eje x). El acoplamiento no lineal entre el sistema primario forzado y el movimiento lateral de la viga (flexión) es posible porque se produce el fenómeno conocido como vibración paramétrica en la viga en voladizo, resultando en una transferencia de energía cinética y , como consecuencia, el movimiento lateral en el absorbedor de vibraciones no lineal.

4.2.1 Resultados en simulación

Se realizaron algunas simulaciones numéricas, utilizando Matlab-Simulink, para mostrar el fenómeno autoparamétrico y , por lo tanto, la atenuación de vibraciones en el sistema primario a través de la implementación del absorbedor no lineal. Los parámetros considerados del sistema completo son los que se muestran en la Tabla 4.1, con la diferencia de que ahora el sistema secundario se configura de tal manera que el valor de su frecuencia natural sea la mitad de la frecuencia de excitación [21].

La Figura 4.7 muestra una comparación de la respuesta dinámica del sistema primario en función de la interacción autoparamétrica donde el porcentaje de absorción de vibración es cercano al 80%.

DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE UN ABSORBEDOR FLEXIBLE PARA EL CONTROL PASIVO DE VIBRACIONES EN UNA ESTRUCTURA TIPO EDIFICIO

Por otro lado, la respuesta temporal del absorbedor no lineal tipo viga en voladizo, cuando existe interacción autoparamétrica, se describe en la Figura 4.8, donde la amplitud de movimiento en estado estable es $y(t) = 33 \text{ cm}$.

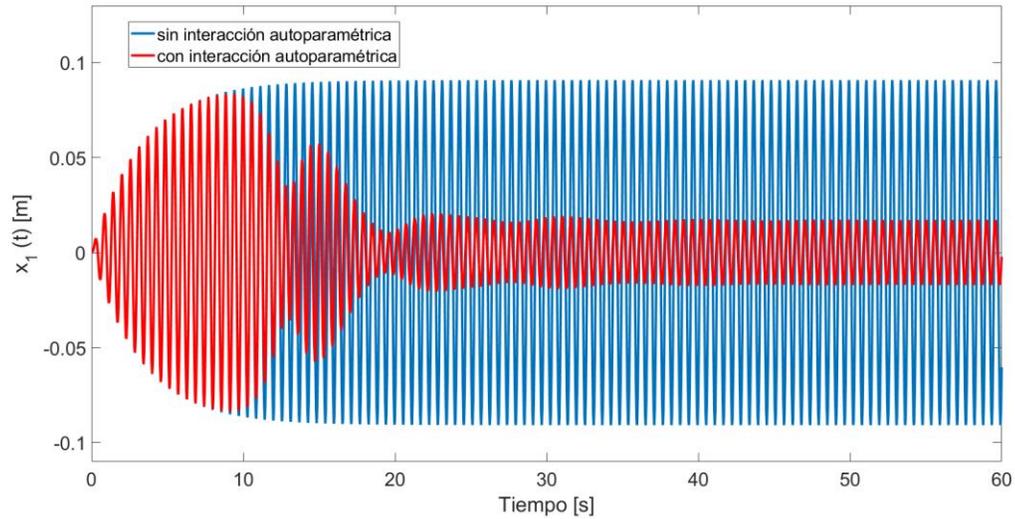


Figura 4.7. Respuesta temporal del sistema primario sin y con absorbedor autoparamétrico.

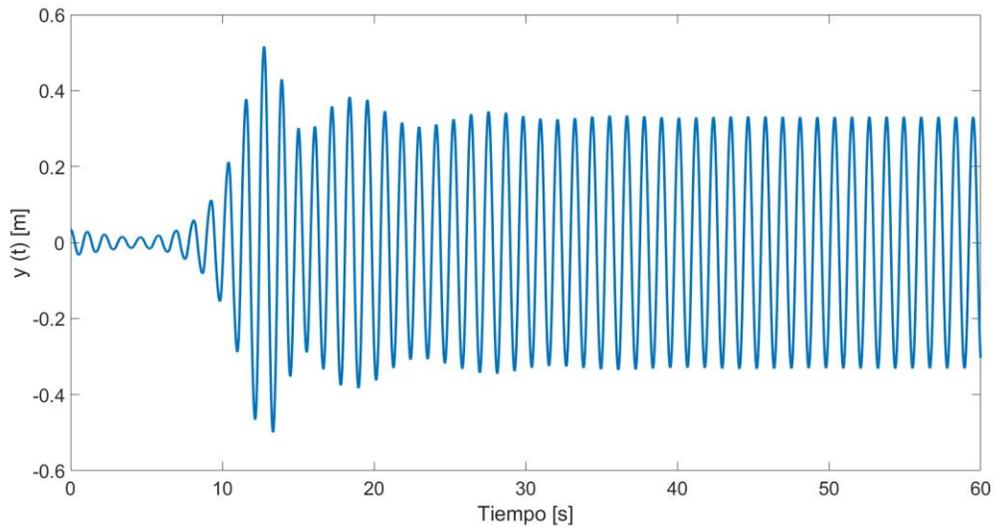


Figura 4.8. Respuesta temporal del absorbedor no lineal cuando existe interacción autoparamétrica.

DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE UN ABSORBEDOR FLEXIBLE PARA EL CONTROL PASIVO DE VIBRACIONES EN UNA ESTRUCTURA TIPO EDIFICIO

Las respuestas en el dominio de la frecuencia, tanto del sistema primario como del secundario, cuando existe absorción de vibraciones en la estructura tipo edificio, se muestran en las Figuras 4.9 y 4.10 respectivamente. Se observa que el sistema secundario se encuentra acoplado con el sistema primario de tal manera que exista interacción autoparamétrica entre ambos; ya que su valor de frecuencia natural ($\omega_{na} = 0.875 \text{ Hz}$) es la mitad de la frecuencia natural del sistema primario ($\omega = 1.75 \text{ Hz} = \Omega$).

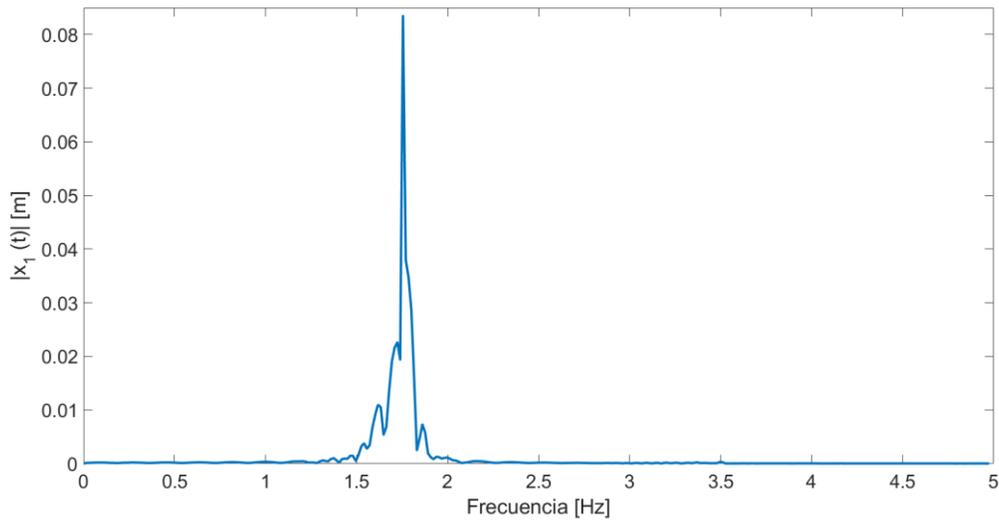


Figura 4.9 FRF del sistema primario con absorbedor autoparamétrico.

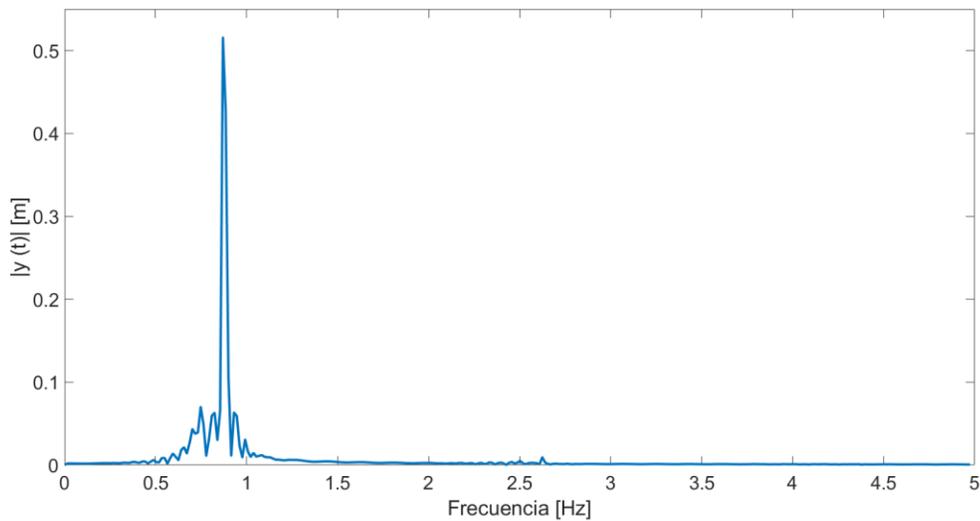


Figura 4.10 FRF del sistema secundario cuando se presenta interacción autoparamétrica.

DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE UN ABSORBEDOR FLEXIBLE PARA EL CONTROL PASIVO DE VIBRACIONES EN UNA ESTRUCTURA TIPO EDIFICIO

La Fig. 4.11 muestra la respuesta en el dominio del tiempo de la estructura tipo edificio ante un barrido senoidal de 0 a 5 Hz cuando se le acopla un absorbedor autoparamétrico tipo viga en voladizo. Es importante aclarar que, si esta respuesta se pasa al dominio de la frecuencia con el algoritmo de la FFT, se obtiene la gráfica que se presenta en la Fig. 4.9; es decir, la respuesta en el dominio frecuencial con este tipo de absorbedor carece de frecuencias resonantes adicionales.

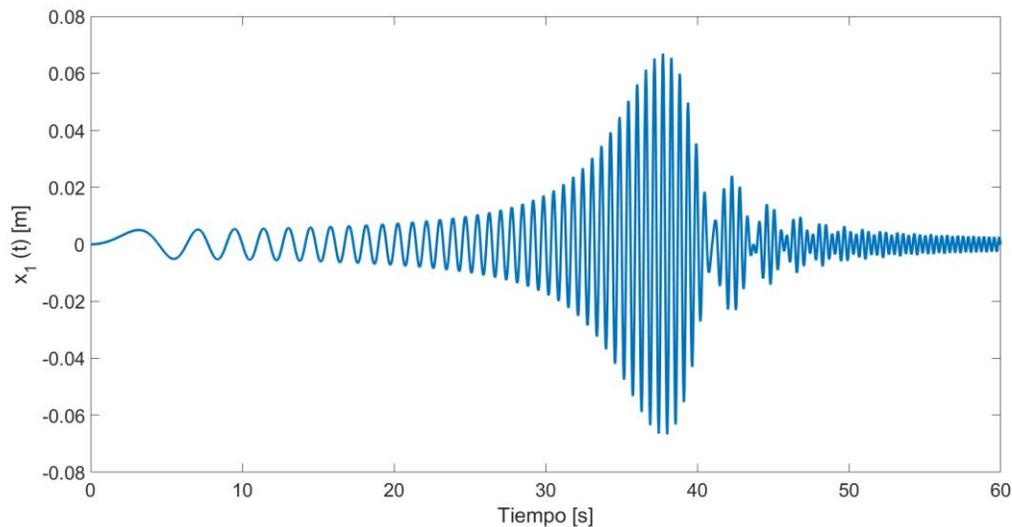


Figura 4.11. Respuesta del sistema primario con absorbedor autoparamétrico ante un barrido senoidal.

4.3 Breve discusión de los resultados

La eficacia y desempeño de los esquemas de control pasivo analizados, hasta este momento, en el presente trabajo de tesis, consideran la atenuación de la respuesta dinámica de una estructura tipo edificio (discretizada en 1 gdl) ante excitación resonante.

Un análisis comparativo, de los resultados obtenidos en simulación, usando un TMD y un absorbedor autoparamétrico se puede establecer en términos de sus ventajas y desventajas:

- Un TMD es un esquema de control pasivo, el cual experimenta un corrimiento en su función de respuesta frecuencial del sistema completo (ver Fig. 4.4). Este efecto se debe, principalmente, a que el sistema primario y el TMD están acoplados elásticamente, (ver ecuaciones (4.8) y (4.9)) de tal forma que las frecuencias naturales son marginalmente desplazadas alrededor de la frecuencia resonante original.

DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE UN ABSORBEDOR FLEXIBLE PARA EL CONTROL PASIVO DE VIBRACIONES EN UNA ESTRUCTURA TIPO EDIFICIO

Por lo tanto, para pequeños cambios en la frecuencia de excitación ω , la dinámica de todo el sistema puede ser inestable debido a la proximidad con respecto a otras frecuencias resonantes. En conclusión, un TMD puede atenuar la respuesta del sistema primario en una banda estrecha de frecuencia, pero para otros valores, la respuesta del sistema se puede incrementar.

- En el caso del sistema primario con absorbedor autoparamétrico tipo viga en voladizo el acoplamiento (no lineal) es inercial y centrífugo y por lo tanto, no se generan otros valores de frecuencias resonantes alrededor de la frecuencia de atenuación (ver Fig. 4.9). Sin embargo, esta característica genera que la dinámica de todo el sistema sea altamente no lineal para fines de análisis y diseño, lo que complica su implementación. Básicamente, un absorbedor autoparamétrico no es útil debido a su capacidad de amortiguamiento sino a su propiedad de alta absorción de energía. Esto es, cuando las condiciones de sintonización externa e interna (ecuaciones (3.6) y (3.7)) se cumplen, la energía externa que afecta al sistema primario se transfiere como energía cinética al absorbedor autoparamétrico, situación que resulta ventajosa, porque entonces el sistema primario puede protegerse de la peor condición dinámica (resonancia).

4.4 Modelo dinámico propuesto para la estructura tipo edificio con absorbedor flexible de vibraciones

Debido a que el absorbedor implementado en este trabajo de tesis es un sistema de parámetros distribuidos (configuración viga en voladizo con masa m en el extremo libre) es necesario obtener un modelo dinámico que describa de mejor manera su comportamiento cuando éste se acopla a la estructura tipo edificio. Ya que solo se tiene interés en el modo de vibración fundamental del sistema secundario (primer modo de vibración), es posible tratar al absorbedor flexible de vibraciones como un sistema generalizado de un grado de libertad de parámetros discretos, en el que la coordenada generalizada sea el desplazamiento lateral de la masa m que se encuentra en el extremo libre del absorbedor. [30], ver figura 4.12.

DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE UN ABSORBEDOR FLEXIBLE PARA EL CONTROL PASIVO DE VIBRACIONES EN UNA ESTRUCTURA TIPO EDIFICIO

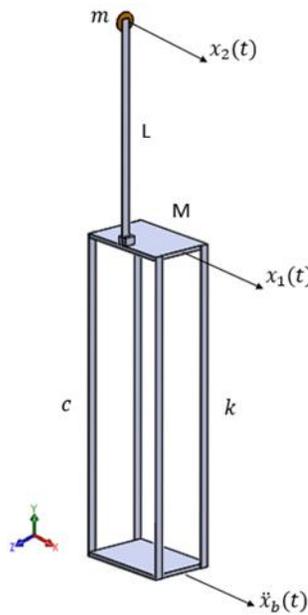


Figura 4.12. Dibujo en CAD de la estructura tipo edificio con absorbedor flexible de vibraciones.

La Figura 4.13 representa el diagrama esquemático de la estructura tipo edificio (sistema masa-resorte) excitado por una fuerza armónica $F(t)$ con amplitud F_0 y frecuencia de excitación ω . Para atenuar las vibraciones resonantes que se presentan en el sistema primario se acopla un absorbedor flexible de vibraciones de manera vertical con parámetros de masa m y longitud L .

El desplazamiento transversal asociado al grado de libertad de la estructura tipo edificio se representa por la coordenada x_1 , el desplazamiento lateral y axial de m , se describen por las variables x_2 y w , respectivamente.

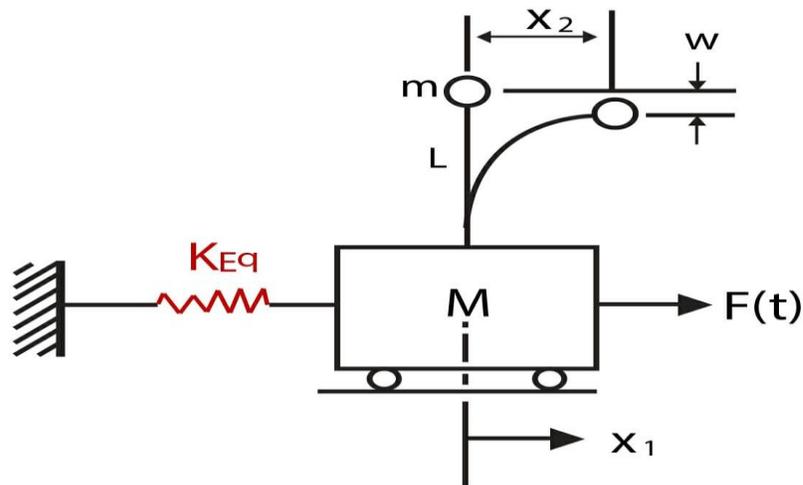


Figura 4.13. Representación esquemática del sistema primario con absorbedor flexible de vibraciones.

DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE UN ABSORBEDOR FLEXIBLE PARA EL CONTROL PASIVO DE VIBRACIONES EN UNA ESTRUCTURA TIPO EDIFICIO

La energía cinética total del sistema es la suma de la energía cinética asociada al movimiento de traslación de M más la energía cinética asociada a la masa en el extremo libre de la viga.

$$T = \frac{1}{2}M\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{w}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{x}_1 + \dot{x}_2)^2 \quad (4.20)$$

La energía potencial total del sistema consiste de la energía potencial asociada a las columnas presentes en el sistema primario, a la energía de deformación debido a la flexión de la viga esbelta y a la energía potencial gravitacional de la masa m [31,32]

$$V = \frac{1}{2}k_{eq}x_1^2 + \frac{1}{2}EI \int_0^L \left(\frac{\partial^2 x_2}{\partial x^2} \right)^2 dx - mgw \quad (4.21)$$

donde k_{eq} es la rigidez equivalente de las cuatro columnas, el producto de EI es la rigidez a la flexión del absorbedor flexible de vibraciones y g es la aceleración debida a la gravedad. El movimiento axial w se puede relacionar directamente con el desplazamiento lateral x_2 de la siguiente manera [33]

$$w = \frac{1}{2} \int_0^L \left(\frac{\partial x_2}{\partial x} \right)^2 dx \quad (4.22)$$

Utilizando la teoría de sistemas generalizados de un grado de libertad, el desplazamiento lateral de la masa m se puede representar por [30]

$$v(x_2, t) = \phi(x_1)x_2(t) \quad (4.23)$$

donde $\phi(x_1)$ es la función de forma, la cual representa de manera aproximada la geometría en que la viga esbelta estará vibrando. Para este caso se escoge $\phi(x_1)$ como la función que describe la curva de deflexión de una viga en voladizo debido a una carga estática en el extremo libre de la misma (ver Fig. 4.14) [34], por lo tanto

$$\phi(x_1) = \frac{3}{2L^2}x_1^2 - \frac{1}{2L^3}x_1^3 \quad (4.24)$$

DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE UN ABSORBEDOR FLEXIBLE PARA EL CONTROL PASIVO DE VIBRACIONES EN UNA ESTRUCTURA TIPO EDIFICIO

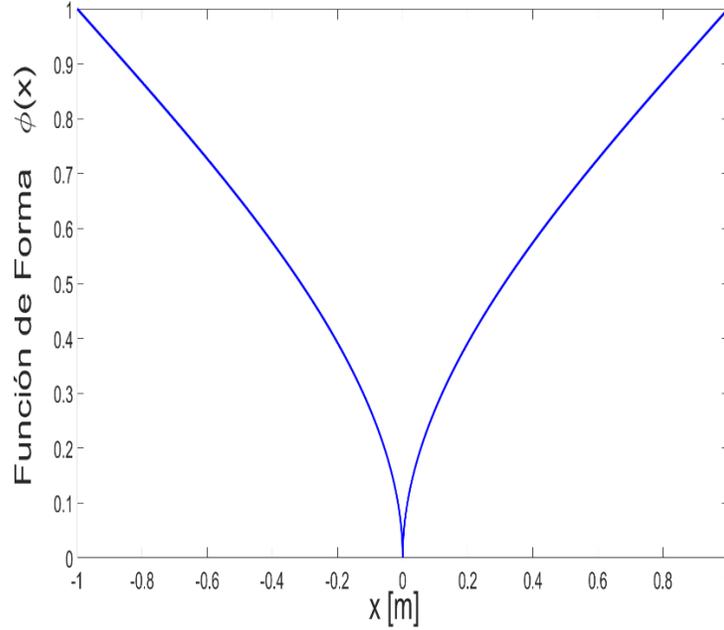


Figura 4.14. Patrón de deformación que tiene el absorbedor flexible de vibraciones

Sustituyendo la ecuación (4.23) en (4.21) y (4.22), resulta

$$V = \frac{1}{2} E I x_2^2 \int_0^L \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right)^2 dx - \frac{1}{2} m g x_2^2 \int_0^L \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 dx \quad (4.25)$$

Por lo tanto, el *Lagrangiano* del sistema de la Fig. 4.13, está dado por:

$$L(x_1, \dot{x}_1, x_2, \dot{x}_2) = \frac{1}{2} M \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m \left[\frac{d}{dt} \left[x_2^2 \int_0^L \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 dx \right] \right]^2 + \frac{1}{2} m (\dot{x}_1 + \dot{x}_2)^2 - \frac{1}{2} k_{eq} x_1^2 - \frac{1}{2} E I x_2^2 \int_0^L \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right)^2 dx + \frac{1}{2} m g x_2^2 \int_0^L \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 dx$$

donde

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial x} &= \frac{3}{L^2} x_1 - \frac{3}{2L^3} x_1^2 \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} &= \frac{3}{L^2} - \frac{3}{L^3} x_1 \\ \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 &= \frac{9}{L^4} x_1^2 - \frac{9}{L^5} x_1^3 + \frac{9}{4L^6} x_1^4 \\ \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right)^2 &= \frac{9}{L^4} - \frac{18}{L^5} x_1 + \frac{9}{L^6} x_1^2 \end{aligned}$$

DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE UN ABSORBEDOR FLEXIBLE PARA EL CONTROL PASIVO
DE VIBRACIONES EN UNA ESTRUCTURA TIPO EDIFICIO

$$\int_0^L \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 dx = \frac{6}{5L}$$

$$\int_0^L \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right)^2 dx = \frac{3}{L^3}$$

$$\left[\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} x_2^2 \int_0^L \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 dx \right] \right]^2 = \frac{36}{25L^2} x_2^2 \dot{x}_2^2$$

Finalmente, el *Lagrangiano* se reescribe como

$$\begin{aligned} L(x_1, \dot{x}_1, x_2, \dot{x}_2) = & \frac{1}{2} M \dot{x}_1^2 + \frac{18}{25L^2} m x_2^2 x_2^2 + \frac{1}{2} m [\dot{x}_1^2 + 2\dot{x}_1 \dot{x}_2 + \dot{x}_2^2] \\ & - \frac{1}{2} k_{eq} x_1^2 - \frac{3EI}{2L^3} x_2^2 + \frac{3mg}{5L} x_2^2 \end{aligned} \quad (4.26)$$

Para obtener el modelo dinámico del sistema mostrado en la Fig. 4.13 se aplica la ecuación de Euler-Lagrange y se considera amortiguamiento viscoso para cada grado de libertad,

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right] - \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} \right] = u(t) - \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} \quad \text{con } i = 1, 2$$

donde D es la función de disipación de Rayleigh y está dada por $D = \frac{1}{2} c_i \dot{q}_i^2$

Haciendo $q_1 = x_1$, resulta,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [\partial L / (\partial \dot{x}_1)] &= (M + m) \ddot{x}_1 + m \ddot{x}_2 \\ \partial L / \partial x_1 &= k_{eq} x_1 \end{aligned}$$

por lo tanto,

$$(M + m) \ddot{x}_1 + m \ddot{x}_2 + c_1 \dot{x}_1 + k_{eq} x_1 = F(t) \quad (4.27)$$

Haciendo $q_2 = x_2$, resulta,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} \right] &= \frac{36m}{25L^2} x_2^2 \ddot{x}_2 + \frac{72m}{25L^2} x_2 \dot{x}_2^2 + m \ddot{x}_2 + m \ddot{x}_1 \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} &= \frac{36m}{25L^2} x_2 \dot{x}_2^2 - \frac{3EI}{L^3} x_2 + \frac{6}{5L} mg x_2 \end{aligned}$$

DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE UN ABSORBEDOR FLEXIBLE PARA EL CONTROL PASIVO
DE VIBRACIONES EN UNA ESTRUCTURA TIPO EDIFICIO

por lo tanto,

$$m\ddot{x}_1 + m\ddot{x}_2 + \frac{36m}{25L^2}x_2^2\ddot{x}_2 + c_2\dot{x}_2 + \frac{36m}{25L^2}x_2\dot{x}_2^2 + \frac{3EI}{L^3}x_2 - \frac{6}{5L}mgx_2 = 0 \quad (4.28)$$

donde las ecuaciones (4.27) y (4.28) representan el modelo dinámico del sistema descrito en la Fig. 4.13. Si se desprecian las no linealidades en la ecuación (4.28) el modelo dinámico se puede reescribir en forma matricial de la siguiente manera

$$M\ddot{q} + C\dot{q} + Kq = Ru(t) \quad (4.29)$$

donde $q = [x_1 \ x_2]^T$, $R = [1 \ 0]^T$ y $M, C, K \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ están dadas por

$$M = \begin{bmatrix} (M+m) & m \\ m & m \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{L^3} - \frac{6}{5L}mg \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

donde M, C y K son las matrices de masa, amortiguamiento y rigidez, respectivamente.

Si se obtiene la transformada de Laplace de cada uno de los términos de la ecuación (4.29), resulta

$$s^2MQ(s) + sCQ(s) + KQ(s) = RU(s) \quad (4.31)$$

de donde es posible obtener la siguiente Función de Transferencia

$$\frac{Q(s)}{U(s)} = H(s) = (s^2M + sC + K)^{-1}R \quad (4.32)$$

Sustituyendo la ecuación (4.30) en (4.32), resulta

$$H(s) = \begin{bmatrix} (M+m)s^2 + c_1s + k & ms^2 \\ ms^2 & ms^2 + c_2s + \frac{3EI}{L^3} - \frac{6}{5L}mg \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$H(s) = \frac{1}{p(s)} \begin{bmatrix} 5mL^3s^2 + 5L^3c_2s + 15EI - 6mgL^2 & -5mL^3s^2 \\ -5mL^3s^2 & 5L^3[(M+m)s^2 + c_1s + k] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, las Funciones de Transferencia del sistema son

$$H(s) = \begin{bmatrix} H_1(s) \\ H_2(s) \end{bmatrix} = \frac{1}{p(s)} \begin{bmatrix} 5mL^3s^2 + 5L^3c_2s + 15EI - 6mgL^2 \\ -5mL^3s^2 \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE UN ABSORBEDOR FLEXIBLE PARA EL CONTROL PASIVO
DE VIBRACIONES EN UNA ESTRUCTURA TIPO EDIFICIO

donde $H_1(s)$ corresponde a la Función de Transferencia de la coordenada $X_1(s)$ con respecto a la entrada $U(s)$, $H_2(s)$ es la Función de Transferencia de la coordenada $X_2(s)$ con respecto a la entrada $U(s)$ y $p(s)$ es un polinomio de cuarto orden dado por

$$p(s) = \alpha_4 s^4 + \alpha_3 s^3 + \alpha_2 s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0 \quad (4.34)$$

con:

$$\alpha_4 = 5L^3 Mm$$

$$\alpha_3 = 5L^3 (Mc_2 + mc_1 + mc_2)$$

$$\alpha_2 = 5L^3 (mk + c_1 c_2) + (M + m)(15EI - 6mgL^2)$$

$$\alpha_1 = 5L^3 c_2 k - 6L^2 gmc_1 + 15Eic_1$$

$$\alpha_0 = 15EIk - 6L^2 gmk$$

Tomando la Transformada inversa de Laplace de la ecuación (4.33) es posible determinar las salidas del sistema en el dominio del tiempo para cualquier entrada $u(t)$.

4.4.1 Condición de sintonización

Para obtener la condición de sintonización entre el absorbedor flexible de vibraciones y el sistema primario se desprecian los amortiguamientos viscosos en cada una de las ecuaciones del modelo dinámico ($c_1 = c_2 = 0$) presentes en (4.29), dando como resultado

$$(M + m)\ddot{x}_1 + m\ddot{x}_2 + k_{eq}x_1 = F(t)$$

$$m\ddot{x}_1 + m\ddot{x}_2 + \frac{3EI}{L^3}x_2 - \frac{6}{5L}mgx_2 = 0$$

Si se proponen soluciones armónicas para cada grado de libertad de la forma $x_1 = A \sin \omega t$, $x_2 = B \sin \omega t$ (donde A y B son constantes) y se sustituyen en el modelo dinámico, resulta

$$[k_{eq} - (M + m)\omega^2]A - m\omega^2 B = F_o$$

$$-m\omega^2 A + \left[\frac{3EI}{L^3} - \frac{6}{5L}mg - m\omega^2 \right] B = 0$$

Debido a que se tiene interés en reducir la amplitud del sistema primario se fija $A=0$, por lo tanto

$$\omega^2 = \frac{3EI}{L^3 m} - \frac{6g}{5L} \quad (4.35)$$

DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE UN ABSORBEDOR FLEXIBLE PARA EL CONTROL PASIVO DE VIBRACIONES EN UNA ESTRUCTURA TIPO EDIFICIO

Si el sistema primario antes de la adición del absorbedor flexible de vibración, opera cerca de su resonancia, el absorbedor se diseña de modo que

$$\omega^2 = \frac{k_{eq}}{M+m} = \frac{3EI}{L^3 m} - \frac{6g}{5L} \quad (4.36)$$

Por cuestiones de simplicidad, se escoge como parámetro de sintonización la longitud del absorbedor flexible cuyo valor se obtiene de encontrar las raíces de la siguiente ecuación

$$\omega^2 L^3 + \frac{6g}{5} L^2 - \frac{3EI}{m} = 0 \quad (4.37)$$

Es importante notar que la ecuación (4.35) también se puede obtener a partir de la Función de Transferencia de Frecuencia de la primera Función de Transferencia en la ecuación (4.33) (despreciando los coeficientes de amortiguamiento), es decir,

$$H_1(j\omega) = \frac{5mL^3(j\omega)^2 + 15EI - 6mgL^2}{5L^3 Mm(j\omega)^4 + [5L^3 mk + (M+m)(15EI - 6mgL^2)](j\omega)^2 + 15EI k - 6L^2 gmk}$$

$$H_1(j\omega) = \frac{-5mL^3 \omega^2 + 15EI - 6mgL^2}{5L^3 Mm - [5L^3 mk + (M+m)(15EI - 6mgL^2)]\omega^2 + 15EI k - 6L^2 gmk} \quad (4.38)$$

donde $j = \sqrt{-1}$ es la unidad de los números imaginarios. Es evidente que si el numerador de la ecuación (4.38) se iguala a cero (condición necesaria para que las oscilaciones del sistema primario sean canceladas) y se resuelve para ω^2 , se llega a la ecuación (4.35).

4.4.2 Resultados en simulación

Se realizaron simulaciones numéricas en *Matlab-Simulink* para mostrar el desempeño del absorbedor flexible de vibraciones acoplado a la estructura tipo edificio considerando ambos modelos dinámicos (ver ecs. (4.27) - (4.28) y (4.29)). Los parámetros considerados del sistema completo se muestran en la Tabla 4.2.

Tabla 4.2 Parámetros del sistema con absorbedor flexible

Parámetro	Valor	Unidad
Masa sistema primario (M)	1.5	kg
Masa sistema secundario (m)	0.15	kg
Rigidez equivalente (k_{eq})	200	N/m
Coefficiente de amortiguamiento en sistema primario (c_1)	1	Kg/s
Coefficiente de amortiguamiento en sistema secundario (c_2)	0.1	Kg/s
Modulo de Elasticidad (E)	69	GPa
Momento de Inercia de Área (I)	8.468×10^{-12}	m ⁴
Longitud (L)	0.4283	m
Frecuencia de excitación (ω)	1.7522	Hz
Amplitud de la aceleración en la base ($x_{h0}\omega^2$)	0.909	m/s ²

DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE UN ABSORBEDOR FLEXIBLE PARA EL CONTROL PASIVO DE VIBRACIONES EN UNA ESTRUCTURA TIPO EDIFICIO

La figura 4.15 muestra la comparación de la respuesta en el dominio del tiempo asociada al desplazamiento lateral de la estructura tipo edificio cuando $\omega = \omega_n$. En esta gráfica se puede observar que el porcentaje de absorción de vibraciones es alto y muy parecido en ambos modelos

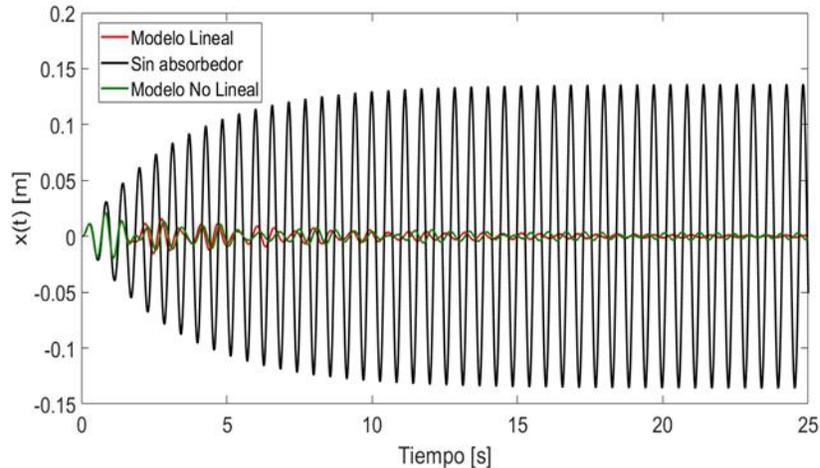


Figura 4.15. Respuesta dinámica del sistema primario sin y con absorbedor flexible de vibraciones.

La figura 4.16 muestra la respuesta dinámica del grado de libertad asociado al desplazamiento lateral del absorbedor flexible de vibraciones ($x_2(t)$) cuando se sintoniza de tal manera que atenúe las oscilaciones resonantes del sistema primario considerando, de nueva cuenta, ambos modelos dinámicos. Es evidente que la diferencia entre ambas respuestas es muy pequeña.

La respuesta temporal del desplazamiento de la estructura tipo edificio (sin y con sistema secundario acoplado) cuando se somete a un barrido senoidal en su base con amplitud constante y frecuencia variable de 0 a 5 Hz se muestra en la figura 4.17. Cuando se aplica el algoritmo de la FFT a las respuestas temporales presentadas en la figura 4.18, se obtienen las Funciones de Respuesta Frecuencial del sistema primario, las cuales se muestran en la figura 4.19. Se observa que el sistema primario, cuando no está acoplado al absorbedor flexible de vibraciones, presenta su amplitud máxima en un valor de frecuencia igual a $\omega = \omega_n = 1.75 \text{ Hz}$.

DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE UN ABSORBEDOR FLEXIBLE PARA EL CONTROL PASIVO DE VIBRACIONES EN UNA ESTRUCTURA TIPO EDIFICIO

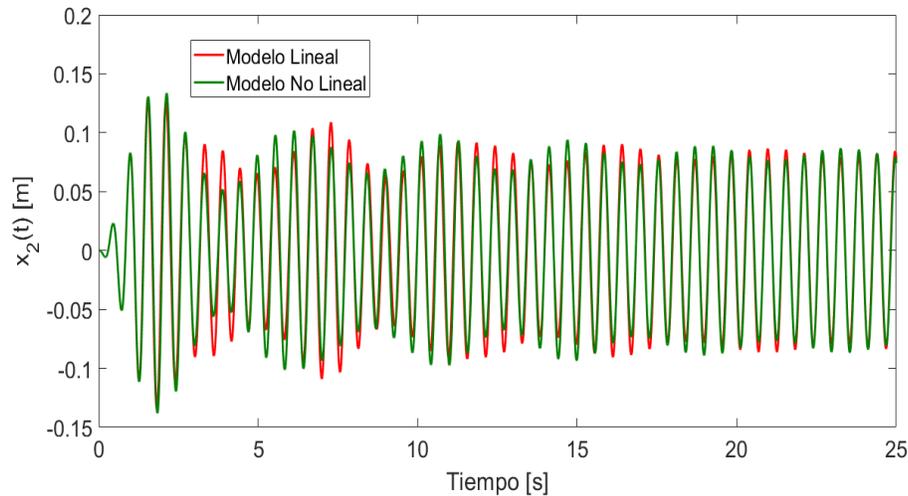


Figura 4.16. Respuesta temporal del sistema secundario.

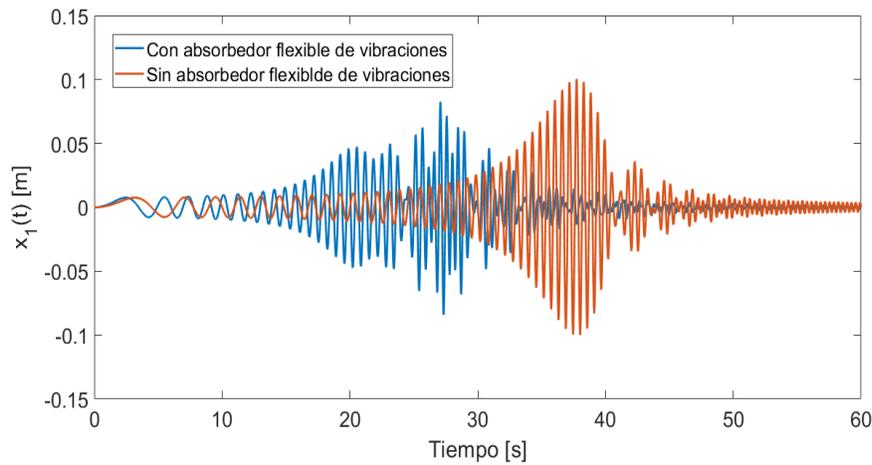


Figura 4.17 Respuesta dinámica del sistema primario ante un barrido sinusoidal.

Una vez que el sistema secundario se diseña para atenuar la respuesta dinámica de la estructura tipo edificio en este valor de frecuencia usando la ecuación (4.37), lo que antes era un pico se convierte en un valle, con la desventaja de que se genera un par de amplitudes máximas alrededor de la frecuencia de sintonización, por lo tanto, el absorbedor flexible de vibraciones tipo viga en voladizo solo puede atenuar la amplitud de las vibraciones resonantes del sistema primario en un ancho de banda reducido alrededor de su frecuencia de diseño por lo que éste carece de robustez; ya que un cambio en la frecuencia de excitación puede provocar, de nueva cuenta, oscilaciones resonantes en la estructura tipo edificio.

DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE UN ABSORBEDOR FLEXIBLE PARA EL CONTROL PASIVO DE VIBRACIONES EN UNA ESTRUCTURA TIPO EDIFICIO

La Figura 4.19 muestra la Función de Respuesta Frecuencial del sistema secundario cuando éste se encuentra acoplado al sistema primario. En esta gráfica se valida la condición de sintonización proporcionada por la ec. (4.36), es decir, $\omega_{n2} = \omega_{n1} = \omega = 1.75 \text{ Hz}$.

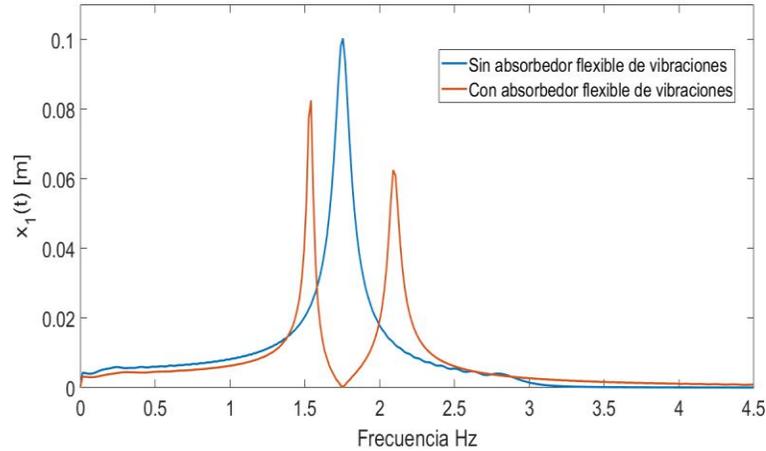


Figura 4.18. Función de Respuesta Frecuencial de la estructura tipo edificio.

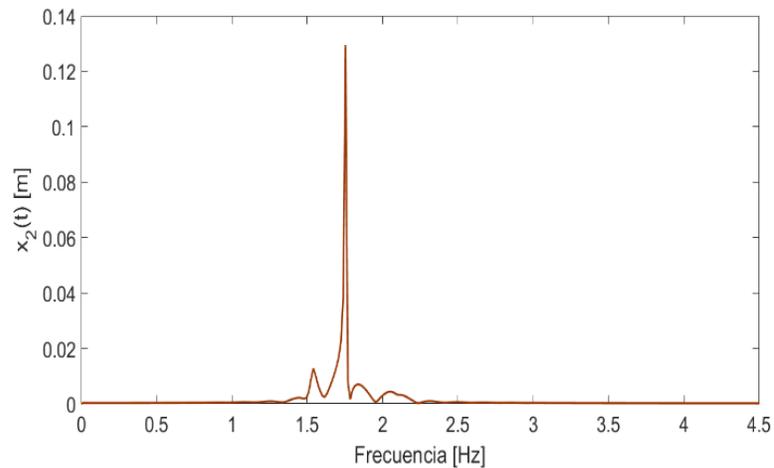


Figura 4.19. Función de Respuesta Frecuencial del sistema secundario.

4.4.3 Análisis de las no linealidades

El análisis de la respuesta en frecuencia de los sistemas mecánicos vibratorios ofrece una herramienta teórico-práctica, con un fundamento experimental y tecnológico muy bien conocido y respaldado para la determinación de la respuesta dinámica de dichos sistemas.

DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE UN ABSORBEDOR FLEXIBLE PARA EL CONTROL PASIVO DE VIBRACIONES EN UNA ESTRUCTURA TIPO EDIFICIO

Aunado a este análisis dinámico, descrito en términos de frecuencias naturales, factores de amortiguamiento y patrones de desplazamiento, existe un creciente interés de la comunidad científica y de los especialistas en diseño mecánico, en la determinación de la presencia de comportamiento no lineal, en los sistemas objeto de análisis y su influencia en el comportamiento del sistema bajo un conjunto de condiciones de operación específicas [35,36] (una determinada amplitud de fuerzas de excitación, amplitudes máximas de aceleración o deformaciones máximas permitidas).

La transformada de Hilbert es una herramienta para el procesamiento de señales muy útil y poderosa en el tema del análisis de la respuesta dinámica de los sistemas mecánicos, sujetos al fenómeno vibratorio [37]. La transformada de Hilbert, para una función de respuesta en frecuencia (FRF) está definida por la expresión:

$$H\{FRF(\omega)\} = -\frac{1}{i\pi} \varphi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{FRF(\omega)}{\omega - \omega_p} d\omega \quad (4.39)$$

donde $H\{FRF(\omega)\}$ es la transformada de Hilbert de la función de respuesta en frecuencia FRF. El coeficiente φ denota el valor principal de Cauchy para la integral, el uso de esta constante es necesario debido al hecho de que el integrando tiene una singularidad en el punto $\omega = \omega_p$.

Cuando se aplica la transformación de Hilbert a una FRF en específico, la parte imaginaria y la parte real de la FRF están relacionadas como:

$$\text{Re}(FRF(\omega)) = -\frac{1}{\pi} \varphi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{Im}(FRF(\omega))}{\omega - \omega_p} d\omega \quad (4.40)$$

$$\text{Im}(FRF(\omega)) = \frac{1}{\pi} \varphi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{Re}(FRF(\omega))}{\omega - \omega_p} d\omega \quad (4.41)$$

Las expresiones (4.40) y (4.41) son conocidas como los pares de Hilbert. Estas dos relaciones no son válidas para sistemas no lineales; como consecuencia, la transformada de Hilbert devolverá una versión distorsionada de la FRF original, de manera que, se tiene un indicador de no linealidad por medio del análisis del nivel de distorsión en la FRF original. Para realizar esta mencionada comparación entre la FRF original y su versión distorsionada, es de gran utilidad el cálculo del coeficiente de correlación cruzada como se define a continuación:

DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE UN ABSORBEDOR FLEXIBLE PARA EL CONTROL PASIVO DE VIBRACIONES EN UNA ESTRUCTURA TIPO EDIFICIO

$$\mu_H = \|\mathfrak{R}_{HF}(0)\|^2 \quad (4.42)$$

donde $\|\mathfrak{R}_{HF}(0)\|$ es el coeficiente de correlación cruzada normalizado, aquí F es la FRF del sistema y H es la Transformada de Hilbert de F y \mathfrak{R}_{HF} se define por:

$$\mathfrak{R}_{HF}(\Delta\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega)F(\omega + \Delta\omega)d\omega \quad (4.43)$$

La expresión definida en (4.42) y (4.43) es un indicador de la no-linealidad del sistema a una amplitud específica. Es posible utilizar este índice para estudiar la presencia de no linealidades en el sistema bajo análisis de manera que entre más se aleje de la unidad el valor del índice μ_H , mayor comportamiento no lineal tendrá el sistema, esto es, para un sistema lineal, el valor esperado para μ_H es exactamente 1.

Es necesario considerar algún criterio para discernir correctamente el rango de este valor, es posible considerar un valor de $0.9 \leq \mu_H \leq 1$ para asumir linealidad en el sistema, como se reporta en detalle en [37] y [38].

En la Figura 4.20 se muestra, en forma tridimensional, la función de respuesta en frecuencia del sistema de la Figura 4.12, cuyo comportamiento dinámico lo describen (4.27) y (4.28). La función de respuesta en frecuencia muestra un comportamiento lineal para el sistema aún en presencia del absorbedor flexible de vibraciones, cuya dinámica es inherentemente no lineal. Los círculos que se observan corresponden a las resonancias o frecuencias naturales del sistema completo y corresponden a los picos de las FRF mostrada en la Figura 4.18. Por otra parte, la línea punteada corresponde a la transformada de Hilbert de la FRF original del sistema (línea continua azul).

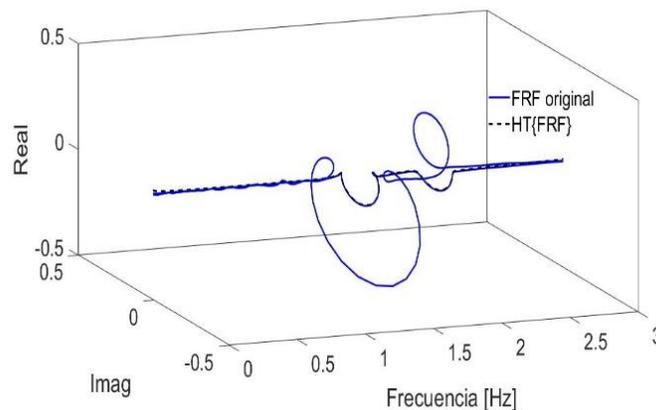


Figura 4.20. FRF original y su transformada de Hilbert.

DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE UN ABSORBEDOR FLEXIBLE PARA EL CONTROL PASIVO DE VIBRACIONES EN UNA ESTRUCTURA TIPO EDIFICIO

En la Figura 4.21 se muestra en detalle, una comparación gráfica entre el diagrama de Nyquist que corresponde a la FRF original del sistema, en línea azul y el diagrama de Nyquist que corresponde a la transformación de Hilbert de la misma FRF, en línea negra punteada. Como se puede observar, no existe una distorsión apreciable en una primera inspección visual, lo que induce a pensar en un sistema predominantemente lineal

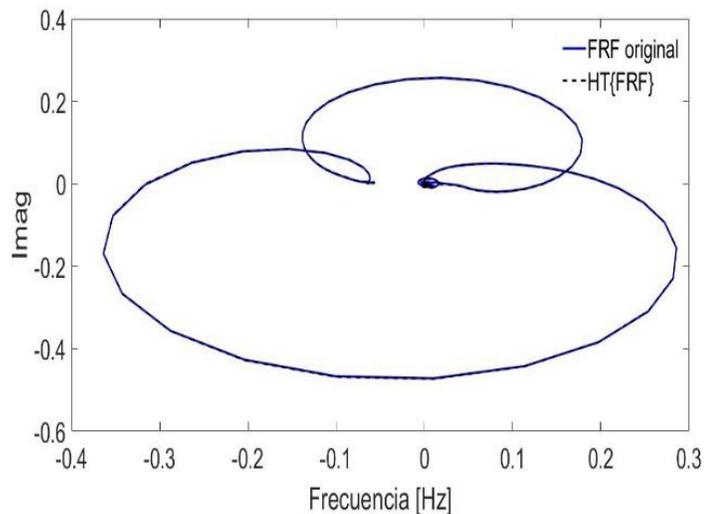


Figura 4.21. Diagrama de Nyquist de la FRF original y su transformada de Hilbert.

El cálculo del coeficiente o índice de no linealidad, como se define en (4.42), proporciona el siguiente resultado:

$$\mu_H = 0.97 \quad (4.44)$$

Debido a que se cumple que $0.9 \leq \mu_H \leq 1$ es posible concluir linealidad en el comportamiento en frecuencia del sistema, aún en presencia del absorbedor no lineal de vibraciones y por lo tanto, la condición de sintonización propuesta, entre sistema primario y el absorbedor flexible de vibraciones, es válida.

DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE UN ABSORBEDOR FLEXIBLE PARA EL CONTROL PASIVO DE VIBRACIONES EN UNA ESTRUCTURA TIPO EDIFICIO

Nota: Los parámetros y gráficos presentados en esta subsección (4.4.3), fueron obtenidos utilizando los programas desarrollados en [39], con el fin de enriquecer este trabajo y contribuir a los resultados obtenidos en lo referente a las no linealidades.

4.4.4 Otras posibles configuraciones del absorbedor flexible de vibraciones

El absorbedor flexible de vibraciones tipo viga en voladizo con masa puntual en el extremo propuesto, en el presente trabajo de tesis, para atenuar pasivamente las oscilaciones resonantes en una estructura tipo edificio se puede implementar en tres configuraciones adicionales como se muestra en la Figura 4.22. En la configuración a) la dinámica del sistema primario acontece en un plano horizontal (X-Z), por lo tanto, la energía potencial a la masa m es despreciable. La configuración b) es parecida a la implementada en la Figura 4.12 donde la única diferencia es que la energía potencial asociada a m es positiva. Finalmente, en la configuración c) el eje del absorbedor flexible es paralelo al sentido de la excitación (eje X), además, al igual que en la configuración a), la dinámica acontece en el plano vertical X-Z

DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE UN ABSORBEDOR FLEXIBLE PARA EL CONTROL PASIVO DE VIBRACIONES EN UNA ESTRUCTURA TIPO EDIFICIO

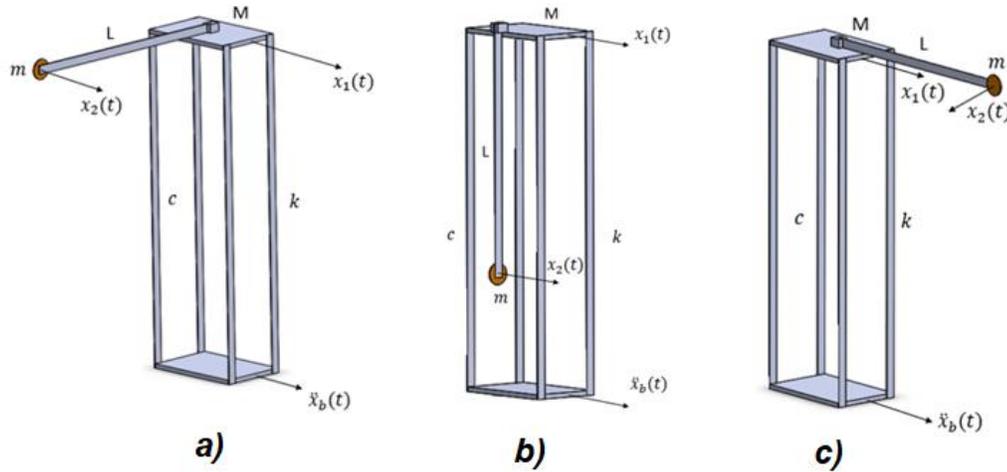


Figura 4.22. Diferentes configuraciones del absorbedor flexible de vibraciones: a) dinámica en un plano horizontal, b) dinámica en un plano vertical (energía potencial positiva), c) dinámica en un plano horizontal (el eje del absorbedor es paralelo a la dirección de la excitación).

Para obtener el modelo dinámico del sistema completo mostrado en las configuraciones a) y b) es posible utilizar el Lagrangiano mostrado en la ecuación (4.26), con la diferencia de que en la primera configuración el último término no aparecerá y en la segunda configuración éste será negativo. Si se aplica la Ecuación de Euler-Lagrange, las ecuaciones de movimiento para este par de configuraciones son:

- Configuración mostrada en a)

$$(M + m)\ddot{x}_1 + m\ddot{x}_2 + c_1\dot{x}_1 + k_{eq}x_1 = F(t) \quad (4.45)$$

$$m\ddot{x}_1 + m\ddot{x}_2 + \frac{36m}{25L^2}x_2^2\ddot{x}_2 + c_2\dot{x}_2 + \frac{36m}{25L^2}x_2\dot{x}_2^2 + \frac{3EI}{L^3}x_2 = 0 \quad (4.46)$$

Si se desprecian las no linealidades, las ecuaciones (4.45) y (4.46) se pueden representar en la forma de la ecuación (4.29), con

$$M = \begin{bmatrix} (M + m) & m \\ m & m \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{L^3} \end{bmatrix} \quad (4.47)$$

DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE UN ABSORBEDOR FLEXIBLE PARA EL CONTROL PASIVO DE VIBRACIONES EN UNA ESTRUCTURA TIPO EDIFICIO

- Configuración mostrada en b)

$$(M + m)\ddot{x}_1 + m\ddot{x}_2 + c_1\dot{x}_1 + k_{eq}x_1 = F(t) \quad (4.48)$$

$$m\ddot{x}_1 + m\ddot{x}_2 + \frac{36m}{25L^2}x_2^2\ddot{x}_2 + c_2\dot{x}_2 + \frac{36m}{25L^2}x_2\dot{x}_2^2 + \frac{3EI}{L^3}x_2 + \frac{6}{5L}mgx_2 = 0 \quad (4.49)$$

De nueva cuenta, si se desprecian las no linealidades, las ecuaciones (4.45) y (4.46) se pueden representar en la forma de la ecuación (4.29), con

$$M = \begin{bmatrix} (M + m) & m \\ m & m \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{L^3} + \frac{6}{5L}mg \end{bmatrix} \quad (4.50)$$

Es evidente que si se comparan los modelos dinámicos linealizados representados por las ecuaciones (4.30), (4.47) y (4.50) la única diferencia entre ellos radica en el elemento (2,2) de la matriz de rigidez K , por lo tanto, el análisis desarrollado en la subsección 4.4.1 (condición de sintonización) se puede aplicar en caso de que el absorbedor flexible de vibraciones se implemente en las configuraciones a) y b) de la Figura 4.22.

Por otro lado, la configuración c) corresponde a un sistema autoparamétrico cuyas ecuaciones de movimiento están dadas por las ecuaciones (4.18) y (4.19). En este trabajo de tesis, no se aborda esta configuración; ya que el desempeño dinámico de este tipo de sistema (detallando aspectos de control pasivo y activo de vibraciones mecánicas) ha sido ampliamente estudiado en la literatura especializada en dinámica estructural [21, 28, 40-44].

Capítulo 5

5. RESULTADOS EXPERIMENTALES

En este capítulo se desarrollan las pruebas experimentales para comprobar el desempeño del absorbedor flexible de vibraciones tipo viga en voladizo en su forma pasiva, propuesto en el presente trabajo de tesis.

El sistema primario consiste de un piso rígido con masa M conectado a la placa de la base por columnas flexibles con rigidez equivalente k la cual es obtenida considerando cuatro elementos elásticos en paralelo, con rigidez lateral individual $12EI_{col}/L^3$, donde E representa el módulo de Young (aluminio), momento de inercia de área I_{col} y longitud L (ver Figura 5.1). Este sistema primario es afectado por una aceleración armónica en la base $\ddot{x}_b = -x_{bo}\omega^2 \text{sen}\omega t$ con amplitud $x_{bo}\omega^2$ y frecuencia de excitación ω . La señal de excitación se proporciona por medio de un robot paralelo de 6 grados de libertad conocido como hexápodo de la marca Quanser, el cual es manipulado en tiempo real dentro de la plataforma Matlab-Simulink. Es importante mencionar que con esta plataforma se pueden excitar 3 movimientos de traslación y 3 movimientos de rotación, pero en este trabajo de investigación, la excitación es uniaxial (eje x).

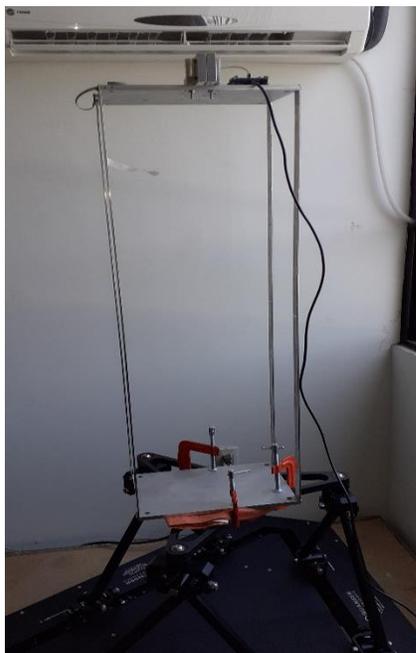


Figura 5.1. Sistema primario montado en el Hexapod-Quanser.

DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE UN ABSORBEDOR FLEXIBLE PARA EL CONTROL PASIVO DE VIBRACIONES EN UNA ESTRUCTURA TIPO EDIFICIO

Para medir la aceleración sobre la masa M del sistema primario se utilizó un acelerómetro triaxial (modelo: ADXL335), pequeño (4 mm x 4 mm x 1.45 mm) y de baja potencia ($350 \mu A$) con un rango de medida de $\pm 3 g$, sensibilidad de 330 mV/g y voltaje de alimentación de 1.8 V a 3.6 V. Para registrar la señal del sensor antes mencionado, se utiliza un microcontrolador Arduino Due, el cual es montado directamente sobre el piso de masa M de la estructura tipo edificio (ver Figura 5.2). Este sistema de adquisición de datos posee 54 pines digitales de entrada y salida (de los cuales 12 pueden ser usados como salidas de modulación por ancho de pulsos, PWM, por sus siglas en inglés), 12 entradas análogas, 2 salidas análogas, 4 UART (puertas seriales por hardware). Finalmente, se desarrolló un programa en el software Python (el cual es de código abierto) para realizar la lectura del sensor con una frecuencia de muestreo de 5,000 Hz y guardar los datos para poder graficarlos en Matlab-Simulink.

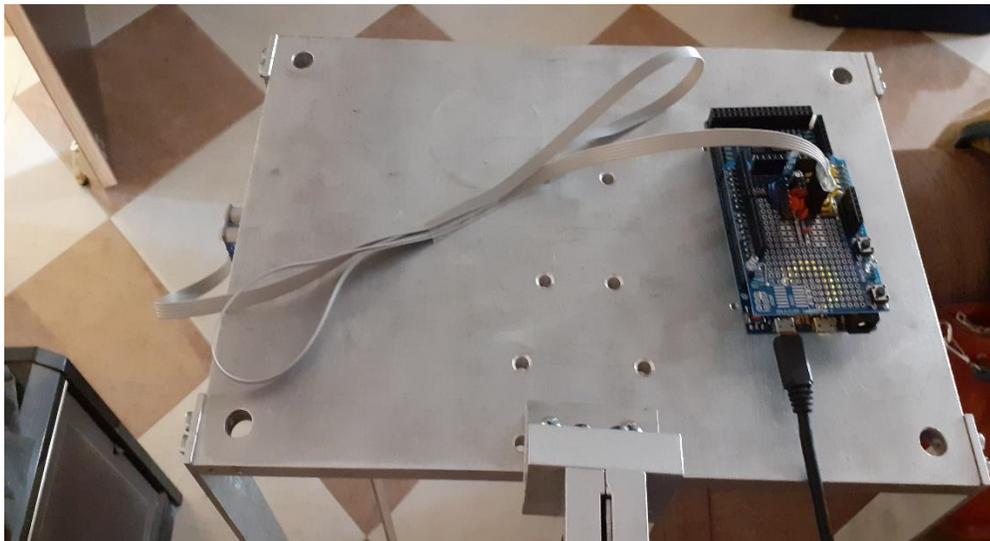


Figura 5.2. Sistema de adquisición de datos colocado en el sistema primario.

5.1 Caracterización de los parámetros modales

5.1.1 Sistema primario

Para obtener los parámetros modales (frecuencia natural (ω_n) y razón de amortiguamiento (ζ)) se emplea el método conocido como *Peak Picking*. Este método se basa en un modelo modal en el dominio de la frecuencia dando como resultado una estimación local de los polos del sistema

DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE UN ABSORBEDOR FLEXIBLE PARA EL CONTROL PASIVO DE VIBRACIONES EN UNA ESTRUCTURA TIPO EDIFICIO

(parámetros modales). Esta técnica se fundamenta en el hecho de que la Función de Respuesta en Frecuencia (FRF) tiene un máximo alrededor de la(s) frecuencia(s) natural(es) (resonancias) [35].

Primero se obtiene la respuesta libre de la estructura tipo edificio (ver Figura 5.3). Debido al sensor que se está utilizando, la respuesta libre, antes mencionada, está en términos de la aceleración $\ddot{x}_1(t)$. Una vez que se adquieren los datos de la respuesta libre, se aplica la FFT, para obtener la respuesta en el dominio de la frecuencia (ver Figura 5.4).

La frecuencia en la cual se presenta el pico máximo, proporciona el valor de la frecuencia natural amortiguada (ω_d). Con el método de la potencia media, se puede calcular un estimado de la razón de amortiguamiento (ζ). Se escogen dos frecuencias (ω_1, ω_2) cercanas a ω_d , de tal forma que $\omega_1 < \omega_d < \omega_2$ y cuyos valores cumplan

$$|A(\omega_1)| = |A(\omega_2)| = \frac{|A(\omega_d)|}{\sqrt{2}} \quad (5.1)$$

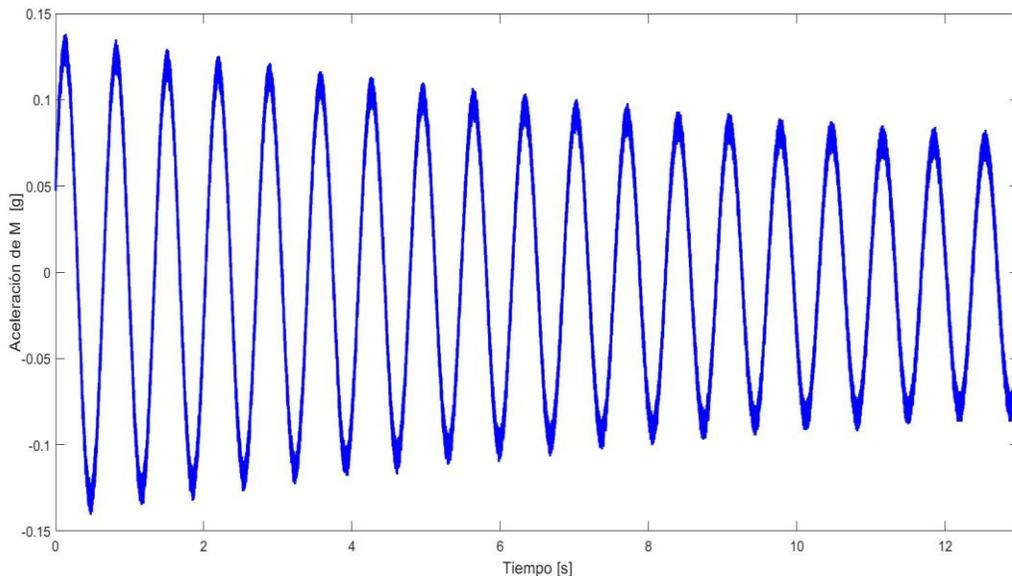


Figura 5.3. Respuesta libre del sistema primario ante una condición inicial de posición.

DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE UN ABSORBEDOR FLEXIBLE PARA EL CONTROL PASIVO DE VIBRACIONES EN UNA ESTRUCTURA TIPO EDIFICIO

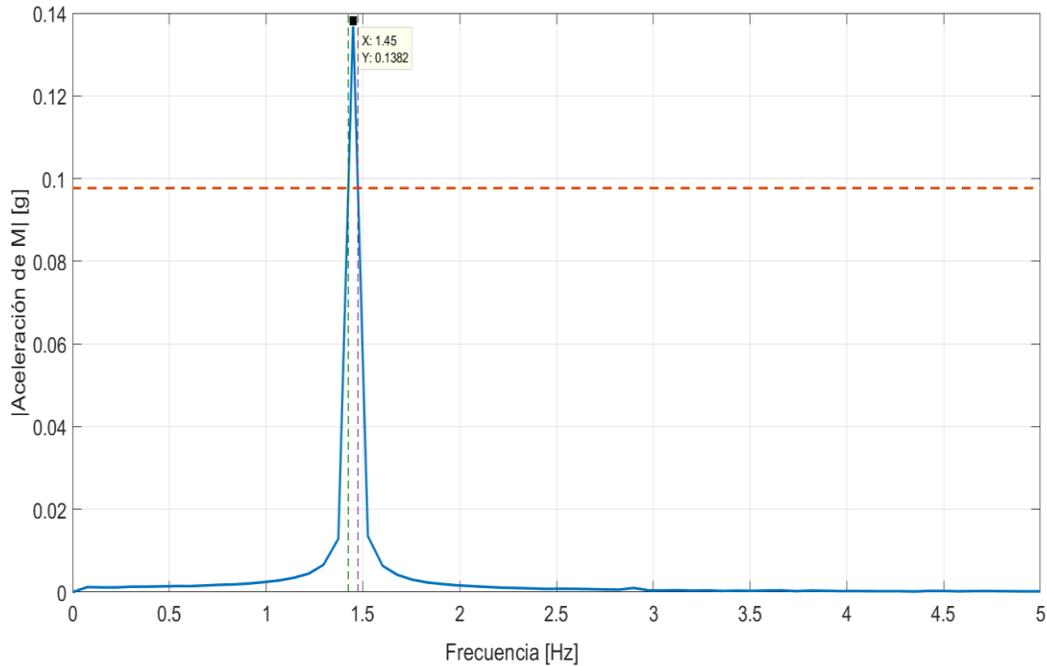


Figura 5.4. Transformada Rápida de Fourier de la respuesta libre de la estructura tipo edificio.

De la figura 5.4 se obtienen los siguientes valores:

$$A_d = 0.1382 \text{ g}$$

$$\omega_d = 1.449 \text{ Hz}$$

$$\omega_1 = 1.425 \text{ Hz}$$

$$\omega_2 = 1.474 \text{ Hz}$$

Posteriormente, la razón de amortiguamiento (ζ) asociada al sistema primario se calcula con la siguiente expresión

$$\zeta = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2\omega_d} \quad (5.2)$$

Por lo tanto,

$$\zeta = \frac{1.474 - 1.425}{2(1.449)} = 0.0169$$

Para determinar la frecuencia natural de la estructura tipo edificio, este parámetro se despeja de la siguiente ecuación

$$\omega_d = \sqrt{1 - \zeta^2} \omega_n \quad (5.3)$$

DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE UN ABSORBEDOR FLEXIBLE PARA EL CONTROL PASIVO DE VIBRACIONES EN UNA ESTRUCTURA TIPO EDIFICIO

dando como resultado

$$\omega_n = \frac{\omega_d}{\sqrt{1 - \zeta^2}} = 1.4492 \text{ Hz}$$

La Tabla 5.1 contiene los parámetros modales asociados a la estructura tipo edificio en su primer modo de vibración.

Tabla 5.1 Parámetros modales del sistema primario.

Modo de vibración	Frecuencia natural (ω_n)	Razón de amortiguamiento (ζ)
1	1.4492 Hz	0.0169

5.1.2 Sistema secundario

Con la intención de atenuar las vibraciones resonantes asociadas al primer modo de vibración del sistema primario, se utiliza un absorbedor flexible tipo viga en voladizo (sistema secundario) con masa m en el extremo libre y movimiento lateral x_2 (ver Figura 5.5).



Figura 5.5. Absorbedor flexible de vibraciones.

El sistema secundario se debe de diseñar de tal forma que su frecuencia natural sea igual a la frecuencia natural del sistema primario (ver ec. (4.36)), entonces, se procede a determinar, de manera experimental, sus parámetros modales.

DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE UN ABSORBEDOR FLEXIBLE PARA EL CONTROL PASIVO DE VIBRACIONES EN UNA ESTRUCTURA TIPO EDIFICIO

La Figura 5.6 muestra la respuesta temporal del sistema secundario (en términos de la aceleración $\ddot{x}_2(t)$) cuando se perturba por una condición inicial de posición. La respuesta del sistema secundario en el dominio de la frecuencia ante la perturbación en su condición inicial de posición se muestra en la Figura 5.7.

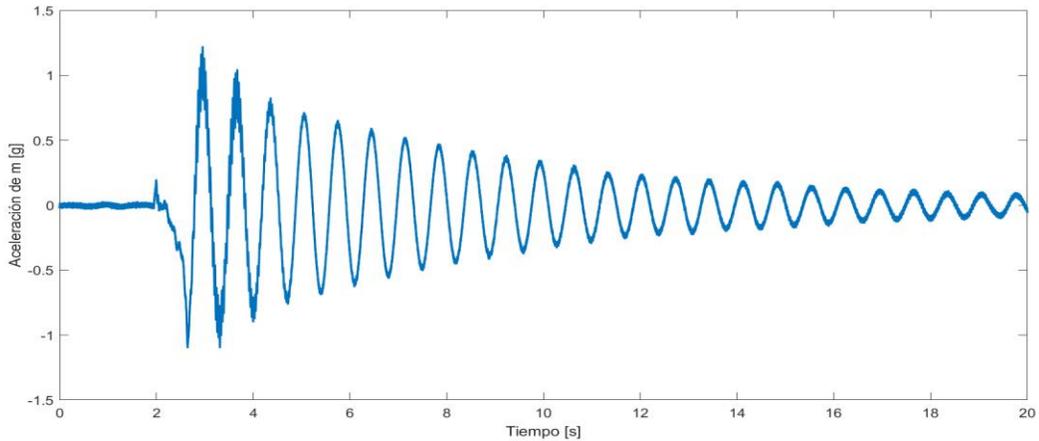


Figura 5.6. Respuesta libre del sistema secundario

Empleando la técnica de Peak Picking y utilizando las ecuaciones (5.2) y (5.3) se determina la frecuencia natural y razón de amortiguamiento asociadas al absorbedor flexible de vibraciones. El valor de estos parámetros se muestra en la Tabla 5.2.

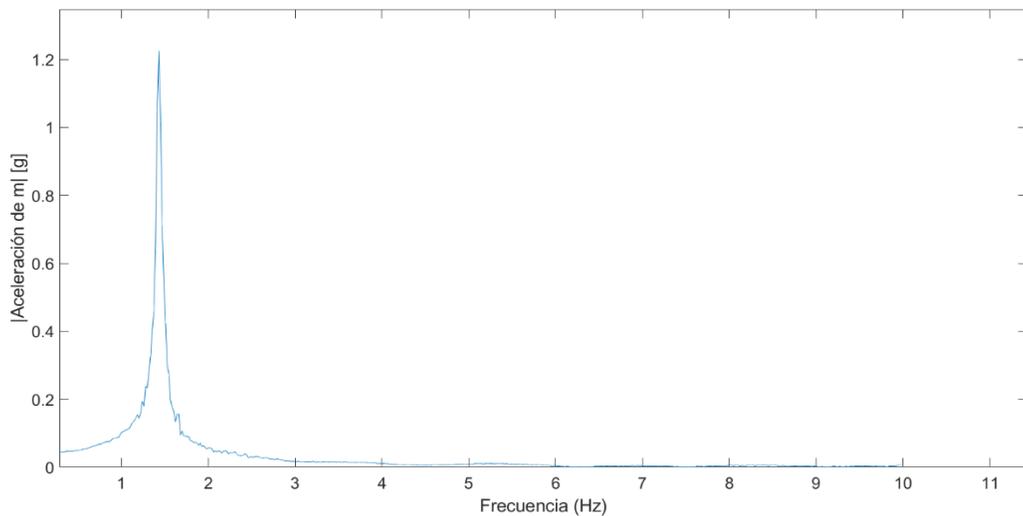


Figura 5.7. Transformada Rápida de Fourier de la respuesta libre del sistema secundario.

DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE UN ABSORBEDOR FLEXIBLE PARA EL CONTROL PASIVO DE VIBRACIONES EN UNA ESTRUCTURA TIPO EDIFICIO

Tabla 5.2 Parámetros modales del sistema secundario.

Modo de vibración	Frecuencia natural (ω_n)	Razón de amortiguamiento (ζ)
1	1.4305 Hz	0.0214

5.2 Sistema primario con absorbedor flexible de vibraciones: Primera configuración.

Una vez obtenido los parámetros modales tanto de la estructura tipo edificio y el absorbedor flexible de vibraciones se realizó el acoplamiento entre ambos subsistemas y su montaje sobre el Hexápodo-Quanser, para validar el esquema de control pasivo propuesto en el presente trabajo de tesis (ver Figura 5.8). Es necesario recalcar que el sistema primario está siendo perturbado armónicamente en su base con frecuencia de excitación igual a su frecuencia natural ($\omega_b = \omega_n = \left(\frac{k}{M}\right)^{1/2} = 1.4492 \text{ Hz}$), por lo tanto, existe una condición resonante en la que la amplitud de vibración del sistema primario alcanza su valor máximo.

Recuérdese que se debe de cumplir la ecuación (4.36) para que el sistema secundario logre atenuar la respuesta resonante del sistema primario; por lo tanto, la longitud que debe de tener el absorbedor flexible, según la ecuación (4.37), es $L = 0.5095 \text{ m}$.

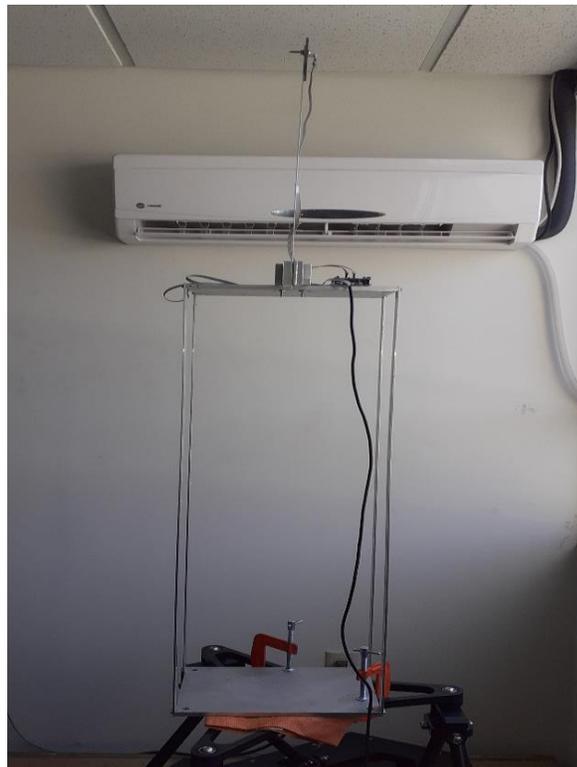


Figura 5.8. Estructura tipo edificio con absorbedor flexible de vibraciones.

DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE UN ABSORBEDOR FLEXIBLE PARA EL CONTROL PASIVO DE VIBRACIONES EN UNA ESTRUCTURA TIPO EDIFICIO

Los parámetros del sistema completo están dados en la Tabla 5.3.

Tabla 5.3 Parámetros del sistema mostrado en la figura 5.8.

$M = 2.706 \text{ kg}$	$k = 224.3747 \text{ N/m}$	$c_1 = 0.83282 \text{ Ns/m}$
$m = 0.125 \text{ kg}$	$EI_{\text{absorbedor}} = 0.5843 \text{ Nm}^2$	$c_2 = 0.04827 \text{ Ns/m}$
$L = 0.5095 \text{ m}$	$\omega = \omega_n = 1.4492 \text{ Hz} \approx \omega_{\text{abs}}$	$X_b = 0.005 \text{ m}$

La Figura 5.9 muestra la respuesta temporal, en términos de la aceleración, de la estructura tipo edificio sin y con absorbedor flexible de vibraciones en condiciones resonantes. Es evidente el alto porcentaje de absorción de vibraciones que se tiene sobre la respuesta dinámica del sistema primario, siendo éste, superior al 90%. Por otro lado, la respuesta en el dominio del tiempo, en términos de la aceleración, del absorbedor flexible de vibraciones cuando $\omega = \omega_n$ se muestra en la Figura 5.10, teniendo una amplitud en estado estable ligeramente superior a $1g$.

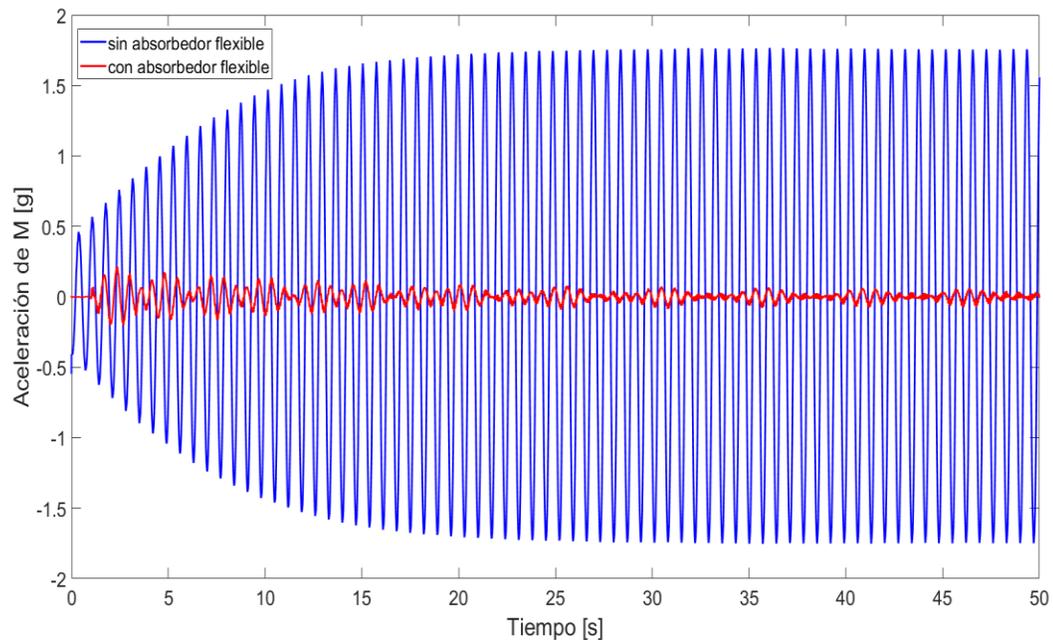


Figura 5.9. Respuesta temporal (experimental) del sistema primario sin y con absorbedor flexible de vibraciones.

DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE UN ABSORBEDOR FLEXIBLE PARA EL CONTROL PASIVO DE VIBRACIONES EN UNA ESTRUCTURA TIPO EDIFICIO

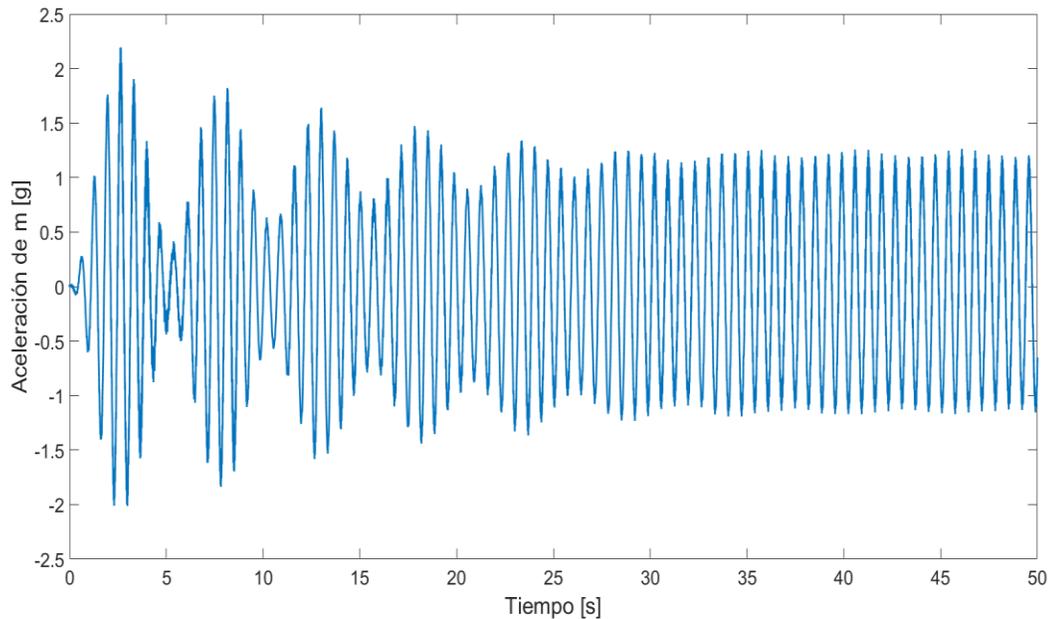


Figura 5.10. Respuesta temporal (experimental) del sistema secundario.

La Figura 5.11 muestra la Función de Respuesta Frecuencial experimental de la estructura tipo edificio sin y con absorbedor flexible; la cual se obtiene al aplicar el algoritmo de la FFT a la respuesta en el dominio del tiempo del sistema primario. Se observa claramente la alta atenuación en la frecuencia de diseño del absorbedor ($\omega = \omega_{abs} = 1.4492 \text{ Hz}$) con la evidente desventaja de que se genera un par de frecuencias resonantes alrededor de la frecuencia de sintonización.

Otro aspecto importante por mencionar de esta gráfica es que la respuesta, en el dominio frecuencial, del sistema primario con absorbedor flexible de vibraciones (línea en color azul) se puede utilizar para obtener los parámetros modales de dicho sistema. Debido a que ahora ya se trata de un sistema discretizado en dos grados de libertad, se debe de utilizar un método de análisis modal experimental basado en múltiples grados de libertad, a saber, curve fitting. El objetivo principal de este método es el mismo que tienen las regresiones de curvas para pares ordenados de datos, es decir, encontrar una curva o función, que minimice el cuadrado del error entre los datos medidos o experimentales con respecto a una curva calculada con parámetros conocidos y bien definidos, para fines de predicción del comportamiento de un sistema o bien la extracción de parámetros modales.

DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE UN ABSORBEDOR FLEXIBLE PARA EL CONTROL PASIVO DE VIBRACIONES EN UNA ESTRUCTURA TIPO EDIFICIO

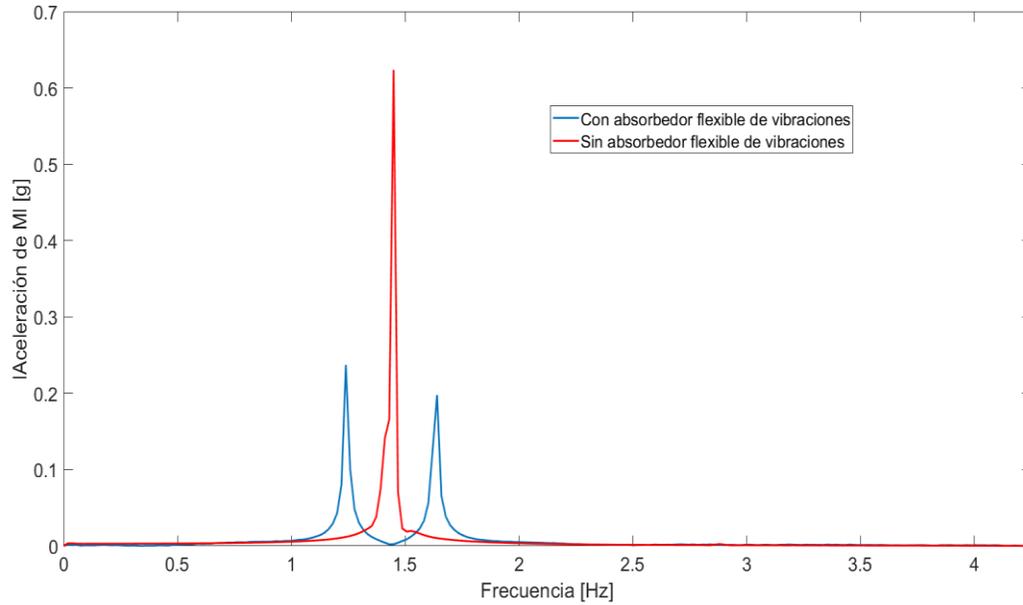


Figura 5.11. Función de Respuesta Frecuencial experimental del sistema primario (primera configuración).

Al contar con una función de respuesta en frecuencia, el objetivo es encontrar una función de transferencia que describa esa FRF de la manera más fiel posible. Para este fin se busca una expresión de la forma

$$G(s) = \frac{b_0 + b_1s + b_2s^2 + \dots + b_ms^m}{a_0 + a_1s + a_2s^2 + \dots + a_ns^n} \quad (5.4)$$

donde $b_0, b_1, b_2, \dots, b_m$ y $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ son los coeficientes a determinar (con $m < n$). De las raíces del polinomio formado por los coeficientes a_i se obtienen los parámetros modales ζ_i (razones de amortiguamiento) y ω_{ni} (frecuencias naturales) [36].

Por cuestiones prácticas se utilizó un programa desarrollado en [45] para aplicar el método de curve fitting y obtener los parámetros modales del sistema de dos grados de libertad (ver Figura 5.12 y tabla 5.4).

DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE UN ABSORBEDOR FLEXIBLE PARA EL CONTROL PASIVO DE VIBRACIONES EN UNA ESTRUCTURA TIPO EDIFICIO

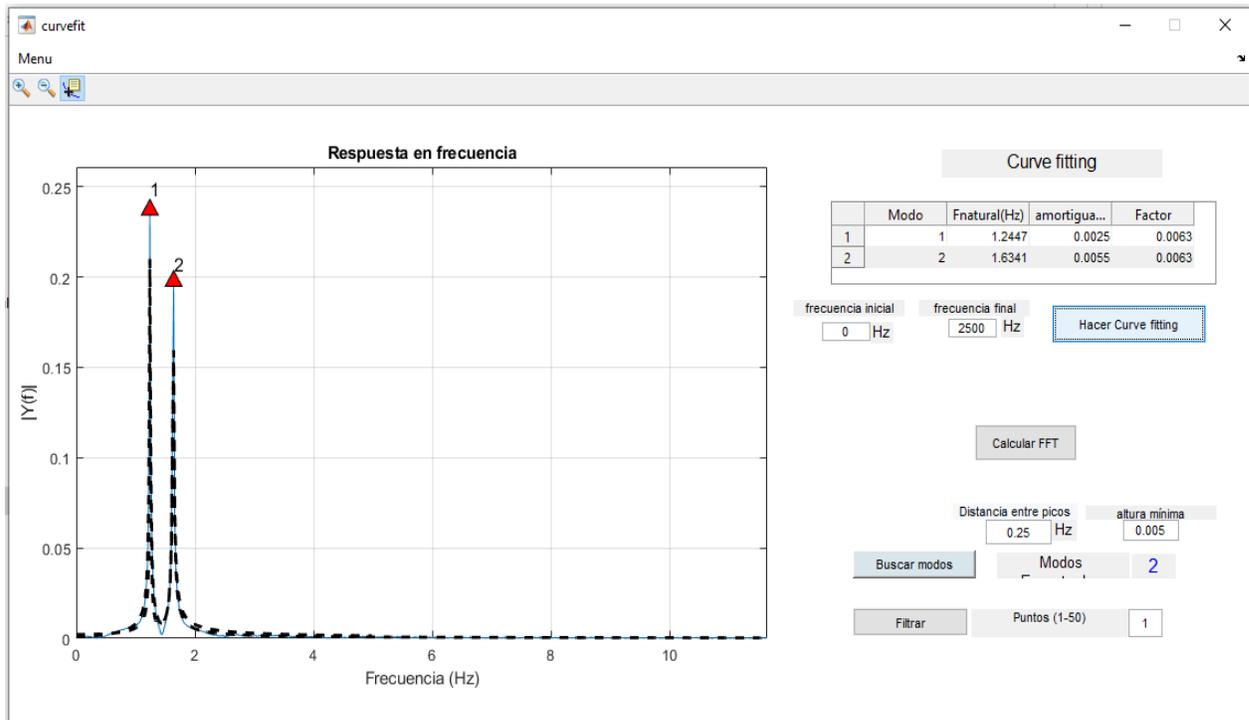


Figura 5.12. Técnica de curve fitting aplicada a la FRF experimental del sistema primario (primera configuración).

Tabla 5.4 Parámetros modales del sistema mostrado en la figura 5.8

Modo	Razón de amortiguamiento (ζ)	Frecuencia natural (ω_n)
1	0.0025	1.2447 Hz
2	0.0055	1.6341 Hz

La aceleración de cada coordenada generalizada ($x_1(t), x_2(t)$) en cada uno de los modos de vibración se muestra en las Figuras 5.13 y 5.14, respectivamente. En este par de gráficas, es evidente que el absorbedor flexible de vibraciones no está sintonizado y, por lo tanto, no contribuye en la atenuación de la respuesta dinámica de la estructura tipo edificio.

La representación visual del primer y segundo modo de vibración se muestran en las Figuras 5.15 y 5.16, respectivamente. Se observa que en el primer modo de vibración las coordenadas generalizadas están en fase una con respecto a la otra, es decir, cuando $x_1(t)$ es positiva también lo es $x_2(t)$; caso contrario acontece en el segundo modo de vibración en el que $x_1(t)$ es negativa, cuando $x_2(t)$ es positiva, por lo tanto, ambos desplazamientos están desfasados uno con respecto a otro.

DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE UN ABSORBEDOR FLEXIBLE PARA EL CONTROL PASIVO DE VIBRACIONES EN UNA ESTRUCTURA TIPO EDIFICIO

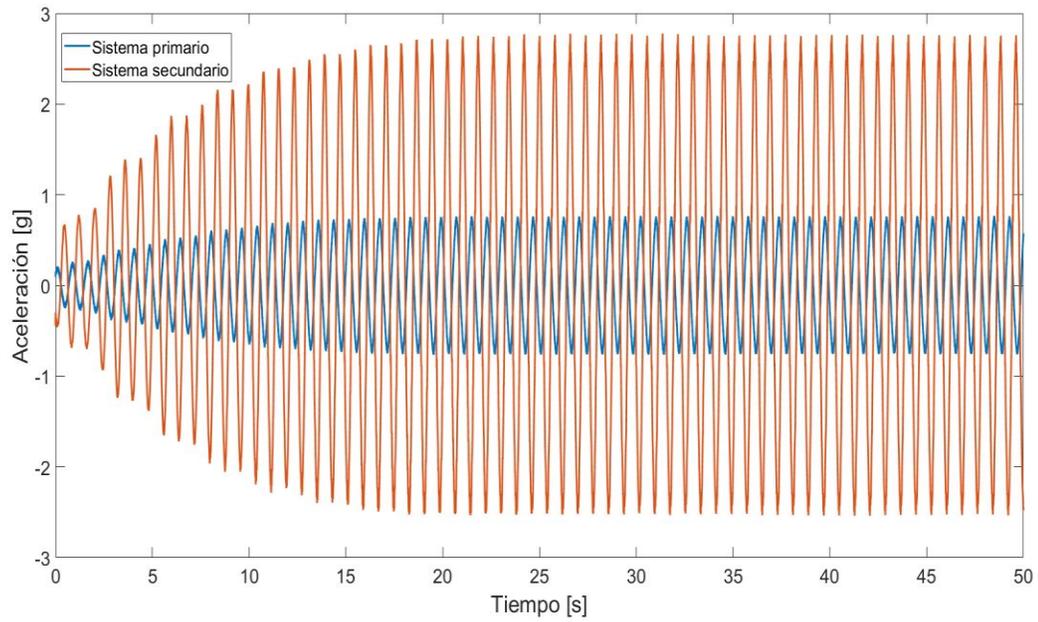


Figura 5.13. Aceleración de cada grado de libertad en el primer modo de vibración.

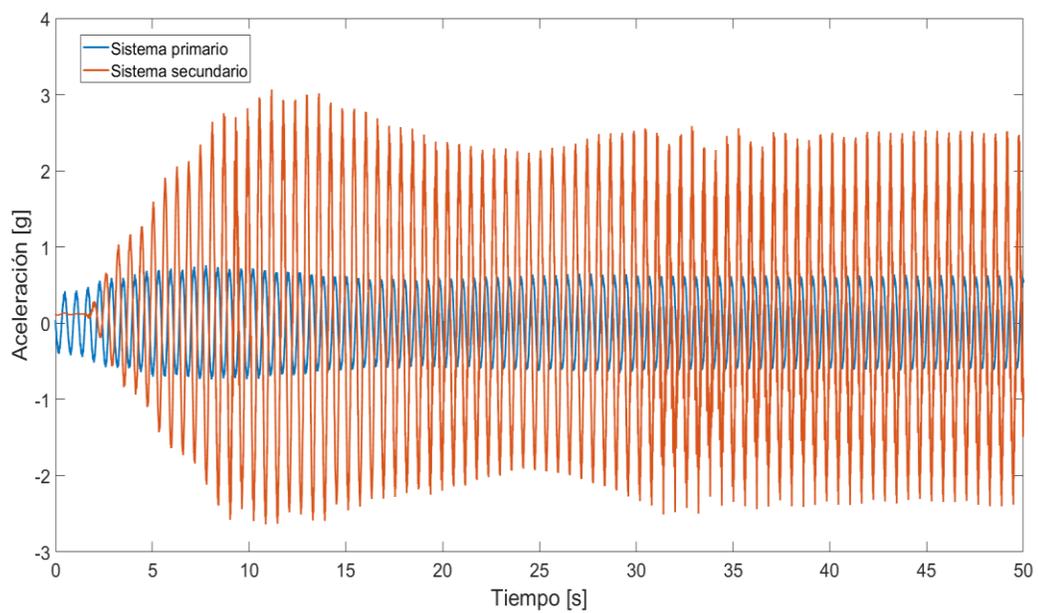


Figura 5.14. Aceleración de cada grado de libertad en el segundo modo de vibración

DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE UN ABSORBEDOR FLEXIBLE PARA EL CONTROL PASIVO DE VIBRACIONES EN UNA ESTRUCTURA TIPO EDIFICIO

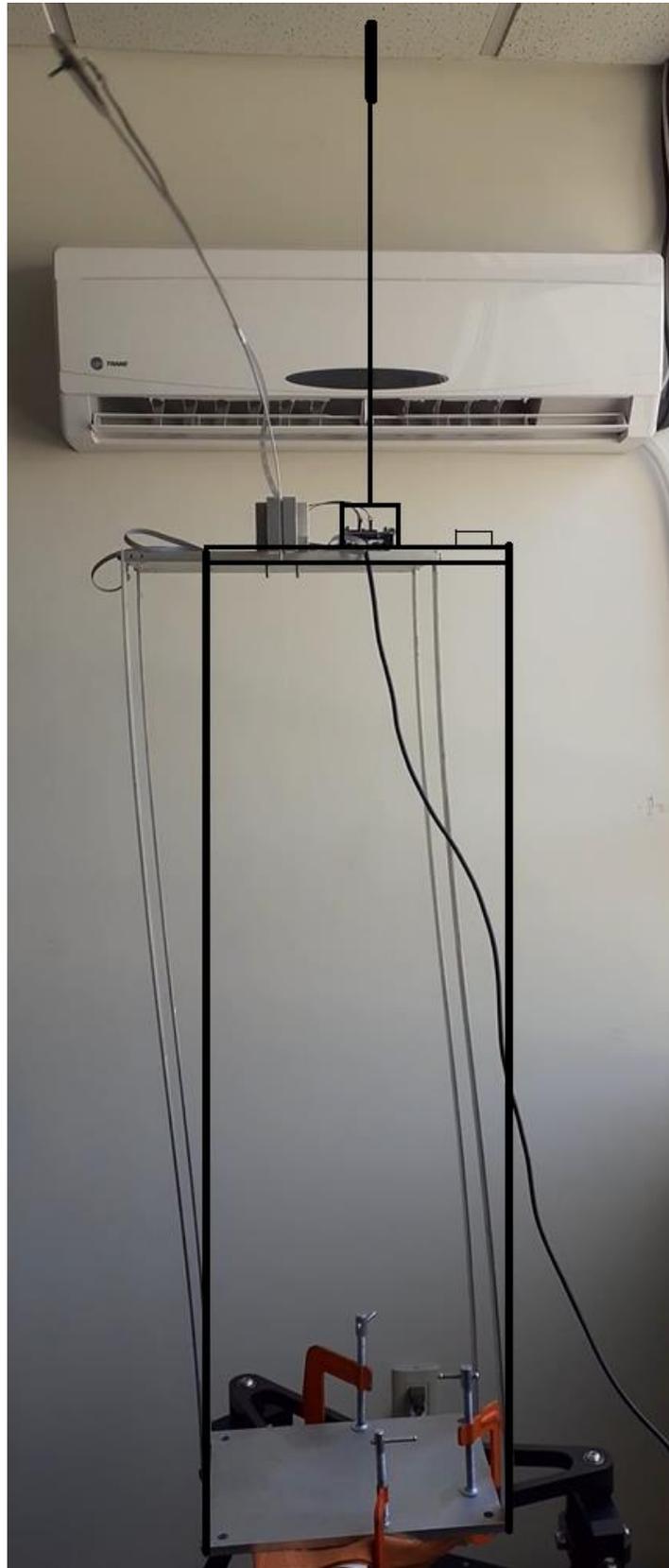


Figura 5.15. Primer modo de vibración del sistema discretizado en 2 gdl.

DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE UN ABSORBEDOR FLEXIBLE PARA EL CONTROL PASIVO DE VIBRACIONES EN UNA ESTRUCTURA TIPO EDIFICIO

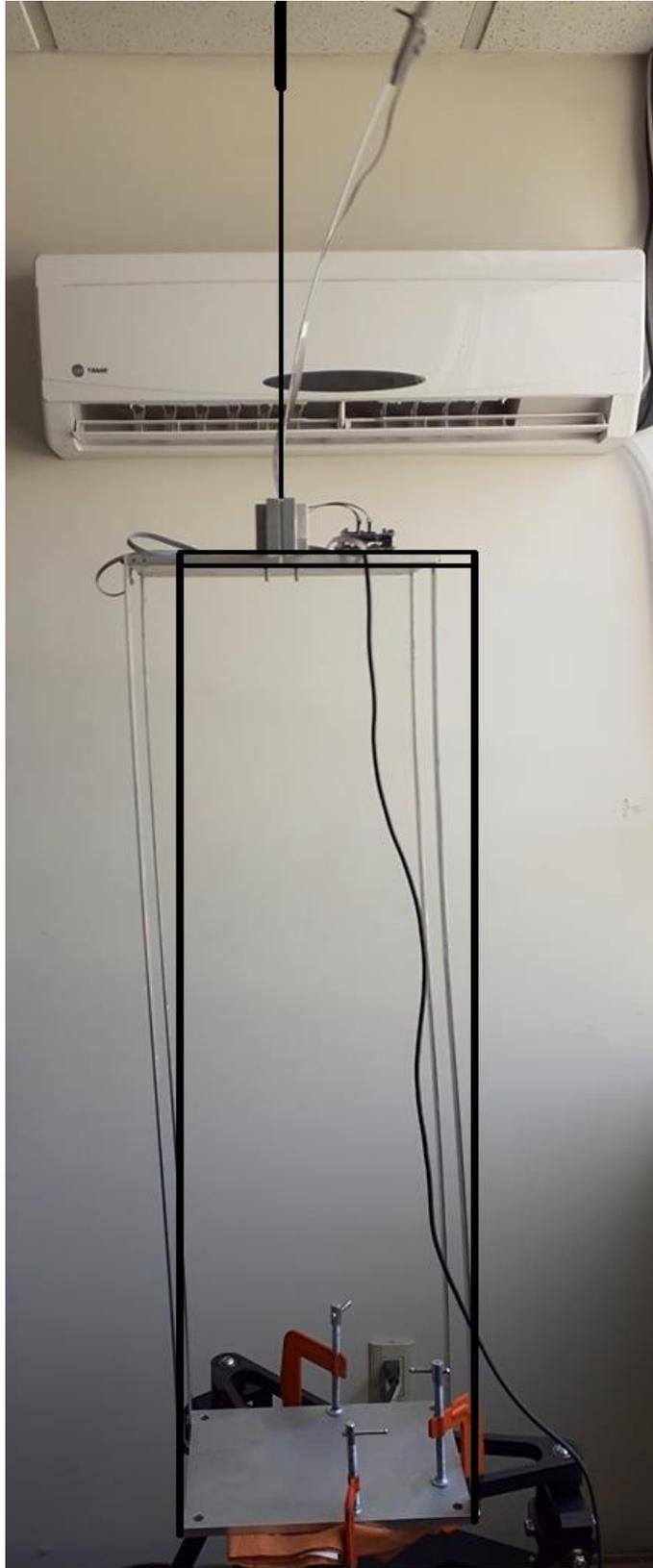


Figura 5.16. Segundo modo de vibración del sistema discretizado en 2 gdl.

5.3 Sistema primario con absorbedor flexible de vibraciones: Segunda configuración.

Con la intención de mostrar que el absorbedor flexible de vibraciones puede atenuar la respuesta resonante de la estructura tipo edificio en cualquiera de sus posibles configuraciones (ver Fig. 4.21), se realizaron experimentos cuando la dinámica de este acontece en un plano horizontal, como se detalla en la Figura 5.17.

Los parámetros del sistema completo para esta configuración son los mismos que los que se describen en la Tabla 5.3 con la única diferencia en el valor de la longitud del sistema secundario ya que, al estar oscilando, en un plano horizontal, se desprecian los efectos gravitatorios asociados a la masa m .

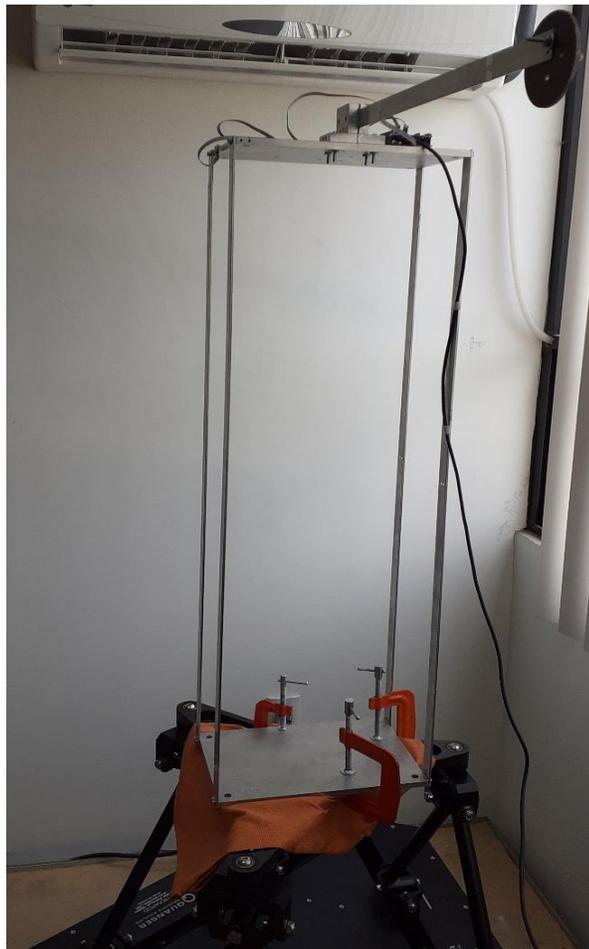


Figura 5.17. Estructura tipo edificio con absorbedor flexible de vibraciones con dinámica en plano horizontal.

DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE UN ABSORBEDOR FLEXIBLE PARA EL CONTROL PASIVO DE VIBRACIONES EN UNA ESTRUCTURA TIPO EDIFICIO

Para determinar el nuevo valor de L que hace que se tenga control pasivo de vibraciones en la respuesta dinámica del sistema primario se debe de determinar las raíces de la ecuación (4.37) con $g = 0$, es decir, se determina L de la siguiente ecuación

$$\omega^2 L^3 - \frac{3EI}{m} = 0 \quad (5.5)$$

Sustituyendo los parámetros de la masa m y rigidez a la flexión EI , se resuelve la ecuación (5.5) donde la única raíz real positiva es el valor de la longitud del sistema secundario ($L = 0.553 m$).

La Figura 5.18 muestra la respuesta dinámica, en términos de la aceleración, sin y con absorbedor flexible de vibraciones de la estructura tipo edificio, cuando esta se somete a una condición resonante en su base. Se puede observar que una vez que se configura el sistema secundario con su nuevo valor de longitud, el efecto dinámico (absorción de vibración) que éste tiene sobre el sistema primario es casi idéntico al que se reporta en la Figura 5.9.

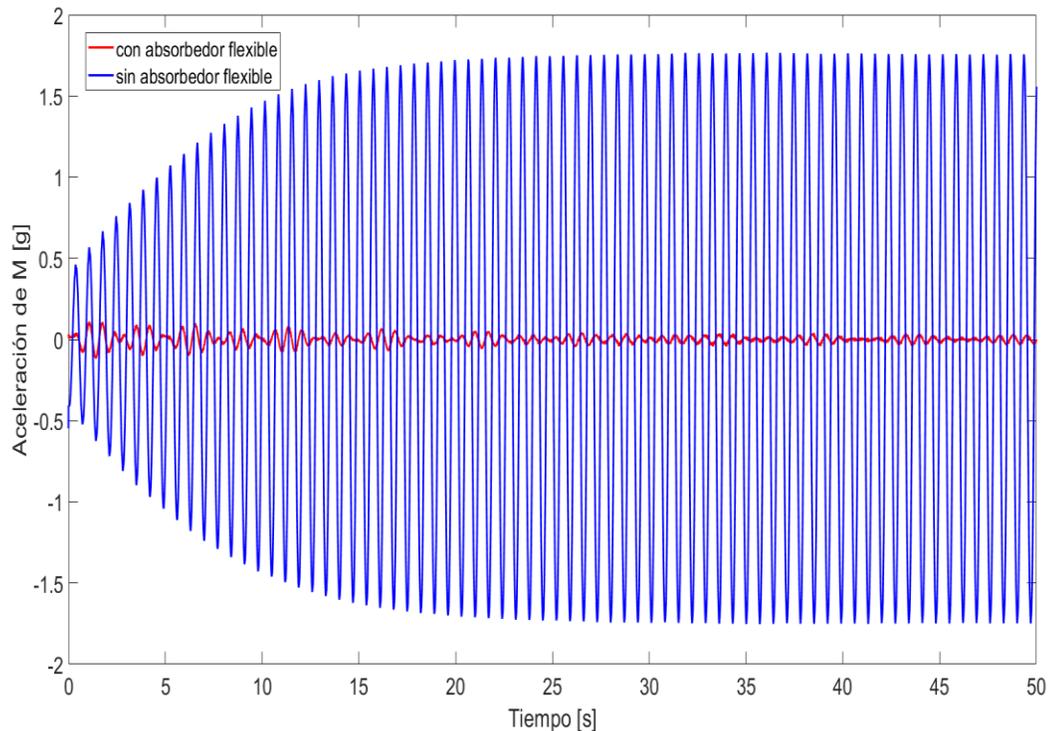


Figura 5.18. Respuesta temporal del sistema primario sin y con absorbedor flexible de vibraciones con dinámica en plano horizontal.

DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE UN ABSORBEDOR FLEXIBLE PARA EL CONTROL PASIVO DE VIBACIONES EN UNA ESTRUCTURA TIPO EDIFICIO

La aceleración del sistema secundario, con dinámica en plano horizontal, se describe en la Figura 5.19. Se observa que la amplitud de este estado dinámico, en estado estable, es aproximadamente $0.5g$; este valor es casi la mitad del que se reporta en la figura 5.9; no obstante, a pesar de esta diferencia entre ambas configuraciones del absorbedor flexible de vibraciones, el porcentaje de absorción es, prácticamente, el mismo.

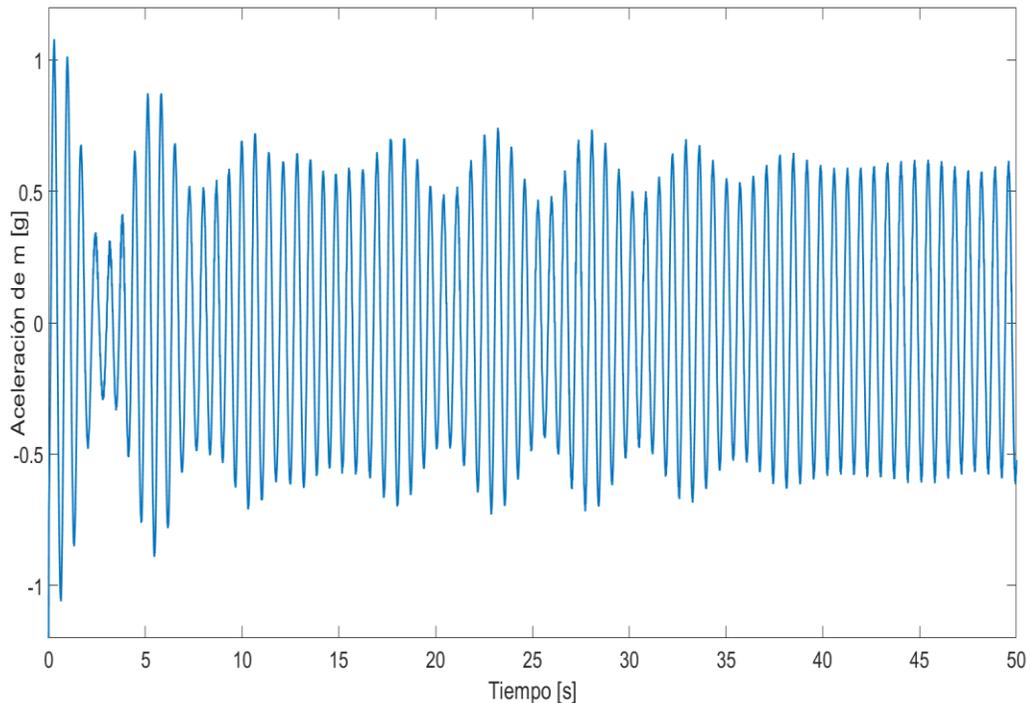


Figura 5.19. Respuesta temporal del sistema secundario con dinámica en plano horizontal.

Por otro lado, es posible realizar una comparación de la respuesta en estado estable del sistema primario, en términos frecuenciales, obtenida con la solución analítica y los resultados experimentales presentados. A partir del análisis desarrollado en la subsección 4.4.1 (condición de sintonización), se obtiene la expresión de la amplitud de vibración de la estructura tipo edificio ante perturbación armónica en su base (con $g = 0$):

$$A = \frac{(M+m)X_b[3EI\omega^2 - mL^3\omega^4]}{MmL^3\omega^4 - [mkL^3 + 3EI(M+m)]\omega^2 + 3EI k} \quad (5.6)$$

DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE UN ABSORBEDOR FLEXIBLE PARA EL CONTROL PASIVO DE VIBRACIONES EN UNA ESTRUCTURA TIPO EDIFICIO

La Figura 5.20 muestra la amplitud de vibración del sistema primario proporcionada por la ecuación (5.6) (considerando los parámetros de la Tabla 5.3 y un valor de $L = 0.553 \text{ m}$) y la Función de Respuesta Frecuencial experimental del sistema que se presenta en la Figura 5.17.

En esta gráfica se puede observar que la respuesta del sistema primario tiene un mínimo en su amplitud (tanto en desplazamiento como en aceleración) para un valor de frecuencia igual a la frecuencia natural del sistema primario ($\omega_n \approx 1.44 \text{ Hz}$) tanto de forma analítica (línea continua en color azul) y experimental (línea continua en color rojo), sin embargo, se tiene una pequeña diferencia en el valor de las frecuencias naturales que se generan alrededor de la frecuencia de diseño del sistema secundario, esto debido al poco amortiguamiento viscoso que se tiene en cada una de las coordenadas generalizadas desde el punto de vista experimental.

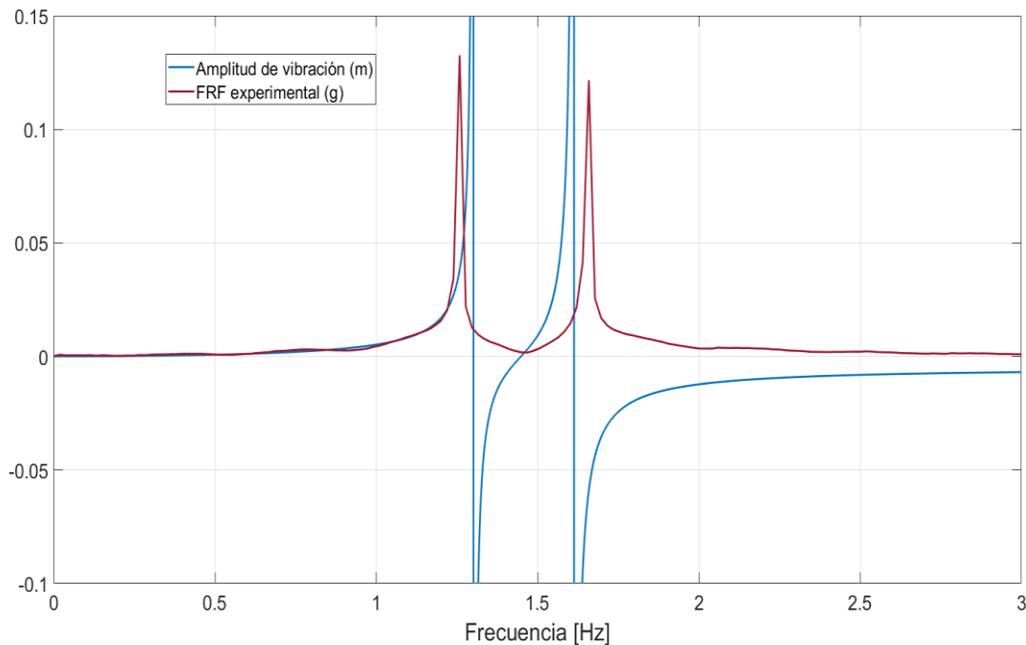


Figura 5.20. Comparación entre la FRF y amplitud de vibración de la estructura tipo edificio con sistema secundario en plano horizontal.

Finalmente, se puede establecer que el absorbedor flexible de vibraciones es capaz de atenuar la respuesta resonante de la estructura tipo edificio, en cualquiera de sus tres posibles configuraciones mostradas en la Figura 4.22, con la diferencia de que cada una de éstas tendrá un valor de longitud diferente para el sistema secundario lo cual se puede observar en la figura 5.21 donde se grafica el polinomio dado por la ecuación (4.37) en función de la longitud del sistema secundario para las tres posibles configuraciones de éste (ver Tabla 5.5).

DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE UN ABSORBEDOR FLEXIBLE PARA EL CONTROL PASIVO DE VIBRACIONES EN UNA ESTRUCTURA TIPO EDIFICIO

Tabla 5.5 Valor de la longitud del sistema secundario con base a su configuración.

Configuración del absorbedor flexible	Valor de L (m)
Dinámica en plano vertical con energía potencial negativa asociada a la masa m (figura 5.7)	0.5095
Dinámica en plano horizontal (figura 5.16)	0.5530
Dinámica en plano vertical con energía potencial positiva asociada a la masa m (figura 4.21-b))	0.6046

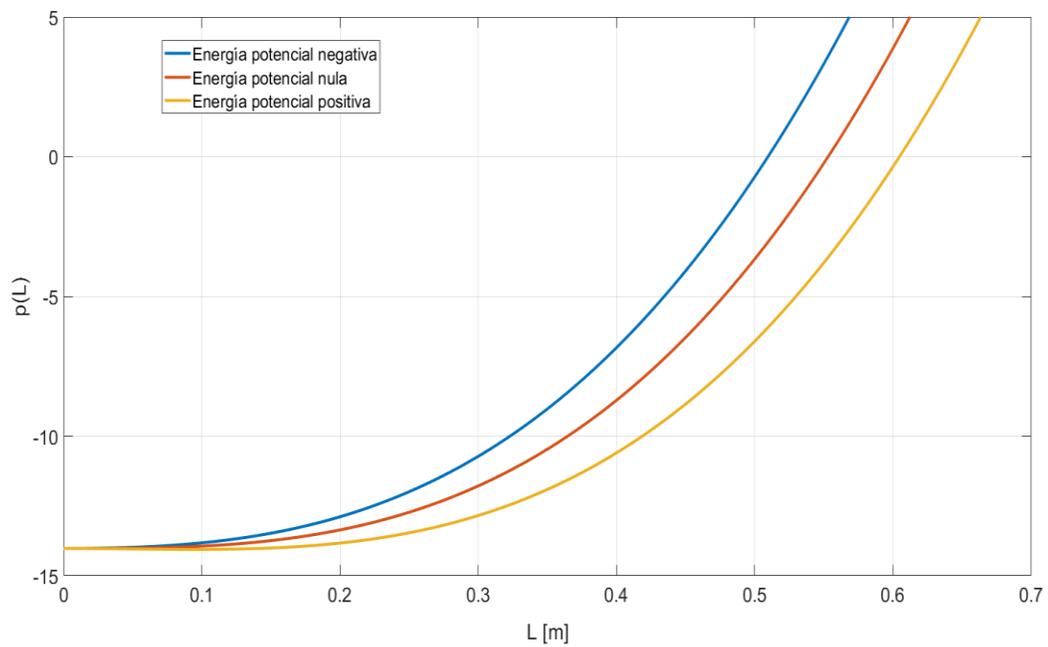


Figura 5.21. Valor del polinomio $p(L)$ en función de la longitud del absorbedor flexible de vibraciones.

Capítulo 6

6. CONCLUSIONES

En este trabajo de tesis se presenta el diseño, construcción y validación experimental de un absorbedor flexible de vibraciones, para una estructura tipo edificio discretizada en 1 grado de libertad con excitación armónica resonante en su base. El sistema completo está conformado por dos subsistemas: el primero que es un oscilador perturbado externamente y se le denomina sistema primario, y el segundo que es propiamente el absorbedor flexible de vibraciones, tipo viga en voladizo con masa puntual en el extremo libre, cuya única fuente de excitación es la respuesta del sistema primario, y se le denomina sistema secundario.

Con base a los resultados que se obtuvieron de manera analítica, numérica y experimental se puede concluir, de manera general, que el absorbedor flexible de vibraciones propuesto muestra muy buen desempeño para atenuar, pasivamente, la respuesta dinámica del sistema primario en o alrededor de su frecuencia de diseño en cualquiera de sus posibles configuraciones. Desde el punto de vista práctico, resulta más conveniente implementarlo de tal forma que su dinámica acontezca en un plano vertical con la masa por encima de la masa principal del sistema primario (ver Fig. 5.7) ya que en esta configuración se requiere una menor longitud para el sistema secundario (ver Tabla 5.5). Por otro lado, independientemente del tipo de configuración que se elija para el absorbedor flexible, se tiene, como desventaja principal, la generación de un par de frecuencias naturales alrededor de la frecuencia de sintonización por lo que no resulta conveniente la aplicación de este tipo de esquema de absorción de vibraciones si la fuente de excitación no es constante o posee múltiples componentes frecuenciales. Esta desventaja coincide con esquemas similares reportados en la literatura (e.g., absorbedores tipo masa-resorte y pendular), donde es bien sabido que ésta se debe al tipo de acoplamiento, ya sea inercial o elástico, presente entre ambos subsistemas; en este caso, debido al modelo dinámico que se obtuvo, el acoplamiento que se tiene entre sistema primario y secundario es del tipo inercial (ver ecuaciones (4.30), (4.47) y (4.50)).

DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE UN ABSORBEDOR FLEXIBLE PARA EL CONTROL PASIVO DE VIBRACIONES EN UNA ESTRUCTURA TIPO EDIFICIO

En cuanto al análisis de no linealidad, el indicador de no linealidad probado es fácil de programar y aplicar al análisis de funciones de respuesta en frecuencia, donde el criterio propuesto para asumir linealidad en el sistema es $0.9 \leq \mu_H \leq 1$, como se explica detalladamente en [37]. El resultado obtenido en este trabajo para el índice de no linealidad, permite concluir de manera formal y cuantitativa, un comportamiento predominantemente lineal del sistema completo con la consecuente confiabilidad y respetabilidad del desempeño dinámico en cuanto a la absorción de vibraciones.

Como trabajo futuro, que podría contribuir a mejorar los resultados hasta ahora mostrados, se considera lo siguiente:

- Validar el desempeño del absorbedor flexible de vibraciones ante otro tipo de perturbaciones en el sistema primario, por ejemplo, excitaciones tipo sismo u ocasionadas por el viento. Para las primeras, se puede seguir usando el hexápodo y para las segundas, se requiere realizar las pruebas en un túnel de viento.
- Probar una función de forma diferente para el absorbedor flexible que describa de mejor manera su patrón de deformación (e.g., $\phi(x) = 1 - \cos(\frac{\pi x}{2L})$) con la intención de realizar una comparación entre ambos modelos dinámicos y realizar un análisis de las no linealidades utilizando la Transformada de Hilbert.
- Complementar la funcionalidad del absorbedor flexible propuesto con la implementación de un absorbedor autoparamétrico, de tal forma que ambos trabajen de manera simultánea para atenuar los modos resonantes que se generan alrededor de la frecuencia de sintonización. Esta modificación, incluso, podría ser aplicada para cuando el sistema primario se discretiza en más de un grado de libertad (la estructura tipo edificio posee más de un piso).
- Realizar un esquema de control semi-activo de vibraciones el cual esté basado en la modificación, en tiempo real, de la rigidez del absorbedor flexible utilizando un material inteligente (parche piezoeléctrico) como actuador y verificar en cuál de las 3 posibles configuraciones del sistema secundario se tiene un mayor porcentaje de absorción con un esfuerzo de control menor. Este esquema permitiría la resintonización automática del absorbedor flexible ante posibles cambios en la frecuencia de excitación proporcionando robustez al sistema.

7. BIBLIOGRAFÍA

- [1] S.S. Rao, Mechanical Vibrations, Addison-Wesley. 3rd ed. USA, 1995
- [2] H.J. Stöckmann, European Physical Journal: Special topics, 2007.
- [3] W. Q. Chen, Y.Q. Guo, “Dynamic Analysis of space structures with multiple tuned mass Dampers” Engineering structures, vol. 29, no. 112, pp. 3390-3403, 2007
- [4] R.K. Craig & A.J. Kurdila, Fundamentals of Structural Dynamics, Wiley, Hoboken, NJ, 2006.
- [5] Gauronski, 2002/A. Preumont, Vibration control of active structures: an introduction, Kluwer Academic, Dordrecht, 2002.
- [6] B.G. Korenev, L.M. Reznikov, Dynamic Vibration Absorber: Theory and Technical Applications; Wiley, London, UK, 1993.
- [7] G. Genta, Vibration of structures and Machines; Practical Aspects, 2nd Ed., Springer-Verlag, New York, 1995.
- [8] C.R. Fuller, S.J. Elliot y P.A. Nelson, Active control of vibration, Academic Press, San Diego, C.A., 1997.
- [9] H. Van Brussel, P. Sas. W. Dehandschutter and y P. Van Den Braembuscsche, Indrawanto, Newmethods for active and Semi-active Vibration Control in Machines, Katholieke Universiteit Leuven, Dept. of Mech. Eng., B-300, Leuven, Belgium, 1994.
- [10] L. Meirovitch, Dynamics and Control of Structures, Jhon Wiley & Sons, NY, 1991.

DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE UN ABSORBEDOR FLEXIBLE PARA EL CONTROL PASIVO DE VIBRACIONES EN UNA ESTRUCTURA TIPO EDIFICIO

- [11] J.P. Den Hartog, *Mechanical Vibrations*, McGraw-Hill, NY, 1934.
- [12] S.G. Braun, D.J. Ewins y S.S. Rao, *Encyclopedia of Vibration*, Vols. 1-3, Academic Press San Diego, CA, 2001.
- [13] R.L. Clark, W.R. Saunders y G.P. Gibbs, *Adaptive Structures: Dynamics and Control*, Jhon Wiley & Sons, 1998.
- [14] T.A. Sakr, *Vibration control of buildings by using partial floor loads as multiple tuned mass Dampers*, HBRC Journal, 2015.
- [15] R. Laurenko, *Design, construction and testing of an adapting pendulum tuned mass damper*, MSc Thesis, University of Waterloo, Waterloo On, Canadá, 2011.
- [16] J.J. Connor, *Introduction to structural motion control*. New York; Prentice Hall, 2002.
- [17] R.A. Ibrahim and H. Heo, "Auto parametric vibration of coupled beams under random support motion", *ASME Journal of Vibration and Acoustics*, vol. 108, no. 4, pp. 421-426, 1986.
- [18] T. Dahlberg, "On optimal use of the mass of a dynamic vibration absorber", *Journal of Sound and Vibration*, vol. 132, no.3, pp. 518-522, 1989.
- [19] O. Cuvalci and A. Ertas "Pendulum as Vibration absorber for flexible structures: experiments and theory", *Journal of Vibration and Acoustics*, Vol 118 no. 4 pp. 558-556, 1996.
- [20] C.K. Hui and C.F. Ng, "Autoparametric vibration absorber effect to reduce the first symmetric mode vibration of a curved beam/panel", *Journal of Sound and Vibration*, vol. 330, no. 18-19, pp. 4551-4573, 2011.

DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE UN ABSORBEDOR FLEXIBLE PARA EL CONTROL PASIVO DE VIBRACIONES EN UNA ESTRUCTURA TIPO EDIFICIO

- [21] H.F. Abundis-Fong, J. Enríquez-Zárate, A. Cabrera-Amado and G. Silva-Navarro, “Optimum design of a nonlinear vibration absorber coupled to a resonant oscillator: A case study”, *Shock and Vibration*, vol. 2018, pp. 1-11, 2018
- [22] T. Ting, Z. Yan, Y. Zou and W. Zhang, “Optimal dual-functional design for a piezoelectric autoparametric vibration absorber”, *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 123, 513-532, 2019.
- [23] C. Y. Wang, C. M. Wang and R. Freund, Vibration of heavy string tethered to mass-spring system, *Int. J. Struct. Stab. Dyn.* 17 1771002, 2017.
- [24] R. G. Jacquot and J. E. Foster, Optimal cantilever dynamic vibration absorbers, *J. Eng. Ind.* 99 138–141, 1997.
- [25] J. C. Snowdon and M. A. Nobile, Beamlike dynamic vibration absorbers, *Acust.* 44 98-108, 1980.
- [26] H. Yamaguchi, Vibrations of a beam with an absorber consisting of a viscolastic beam and a spring-viscous damper, *J. Sound Vibr.* 103 417-425. 1985.
- [27] A. Arpacı and M. Savcı, A cantilever beam damper suppressing rectangular plate vibrations, *J. Sound Vibr.* 115 225–232, 1987.
- [28] G. Silva-Navarro and H. F. Abundis-Fong, “Passive/active autoparametric cantilever beam absorber with piezoelectric actuator for a two-story building-like structure” *Journal of Vibration and acoustics*, vol. 137, no. 1, Article ID 011017, 2015.
- [29] Daniel J. Inman “Engineering Vibration”, Prentice Hall, 2014.
- [30] J. de la Colina, J. Valdez, A. González, *Dinámica de estructuras*, Limusa, 2016.

DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE UN ABSORBEDOR FLEXIBLE PARA EL CONTROL PASIVO DE VIBRACIONES EN UNA ESTRUCTURA TIPO EDIFICIO

- [31] H. Handelman, E. Beyonce and H. Cohen, Vibration of a uniform rotating beam with tip mass. *Proceeding of Third U.S. National Congress of Applied Mechanichs*, Providence, RI, pp. 175-180, 1958.
- [32] W. Weaver, S.P. Timoshenko and D.H. Young, *Vibration Problems in Engineering*. Wiley, 1990.
- [33] L. Meirovitch, *Analytical Methods in Vibrations*. Macmillan, 1967.
- [34] R.C. Hibbeler, *Mechanics of Materials*, Eighth Edition, Prentice Hall, 2010.
- [35] C.W. De Silva, *Vibration, fundamentals and practice*. New York: CRC press Boca Raton, 2000.
- [36] Jimin He and Zhi-Fang Fu, *Modal Analysis*. UK, Oxford Imprint Butterworth-Heinemann, 2001.
- [37] M. Feldman, *Hilbert Transform Applications in Mechanical Vibration*. John Wiley and Sons, Ltd, Chichester, UK, Mar. 2011.
- [38] V. Ondra, I. A. Sever and C. W. Schwingshackl, "A method for detection and characterisation of structural non-linearities using the Hilbert transform and neural networks", *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 83, pp. 210-227, 2017.
- [39] L.G. Trujillo-Franco. Esquemas de identificación algebraica de parámetros modales en sistemas vibratorios: integración y validación experimental. *Tesis de doctorado*. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, Sección de Mecatrónica. México CDMX, Noviembre 2017.

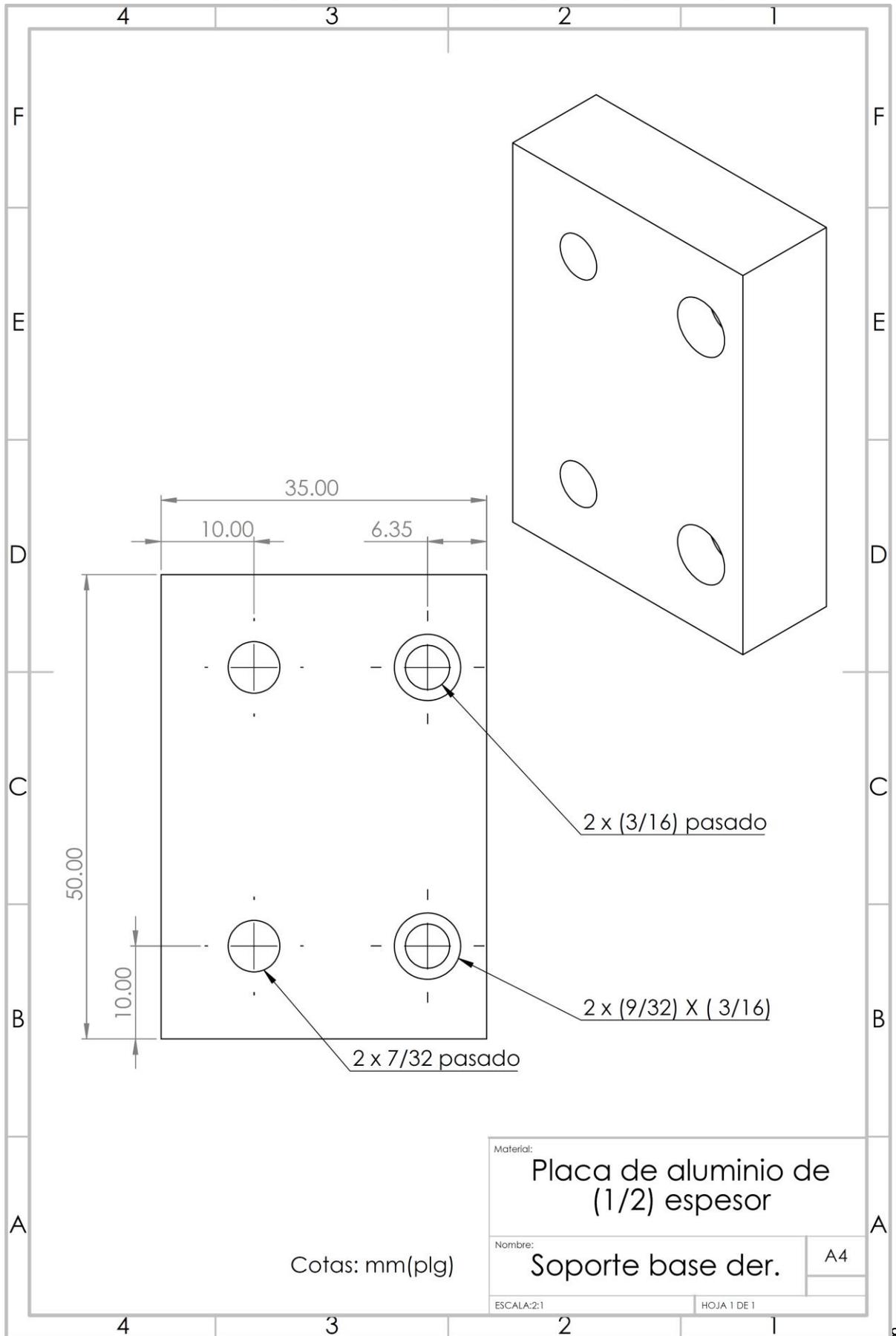
DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE UN ABSORBEDOR FLEXIBLE PARA EL CONTROL PASIVO DE VIBRACIONES EN UNA ESTRUCTURA TIPO EDIFICIO

- [40] R.S. Haxton, A.D.S. Barr, “The autoparametric vibration absorber”, *Journal of Engineering for Industry*, vol. 94, no. 1, pp. 119-124, 1972.
- [41] R.A. Ibrahim, Y.J. Yoon, M.G. Evans, “Random excitation of nonlinear coupled oscillation”, *Nonlinear Dynamics*, vol. 1, pp. 91-116, 1990.
- [42] O. Cuvalci, A. Ertas, S. Ekwaro-Osire, I. Cicek, “Non-linear vibration absorber for a system under sinusoidal and random excitation: Experiments”, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 249, no. 4, pp. 701-718, 2002.
- [43] J. Enríquez-Zárate, H.F. Abundis-Fong, G. Silva-Navarro, “Passive vibration control in a building-like structure using a tuned-mass-damper and an autoparametric cantilever beam absorber”, *Proc. SPIE 9431, Active and Passive Smart Structures and Integrated Systems*, 94312Z, 2015.
- [44] D.A. Flores-Sánchez, N. Flores-Morita, R.E. Campa-Cocom, L.G. Trujillo-Franco, H.F. Abundis-Fong, “Attenuation of Vibrations in a Mechanical Oscillator by Implementing Two Types of Vibration Absorbers: Experimental Results”, *International Conference on Mechatronics, Electronics and Automotive Engineering (ICMEAE)*, pp. 104-109, 2020.
- [45] L.G. Trujillo-Franco. Evaluación experimental de técnicas de identificación de parámetros modales en sistemas mecánicos. *Tesis de maestría*. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, Sección de Mecatrónica. México CDMX, Noviembre 2012.

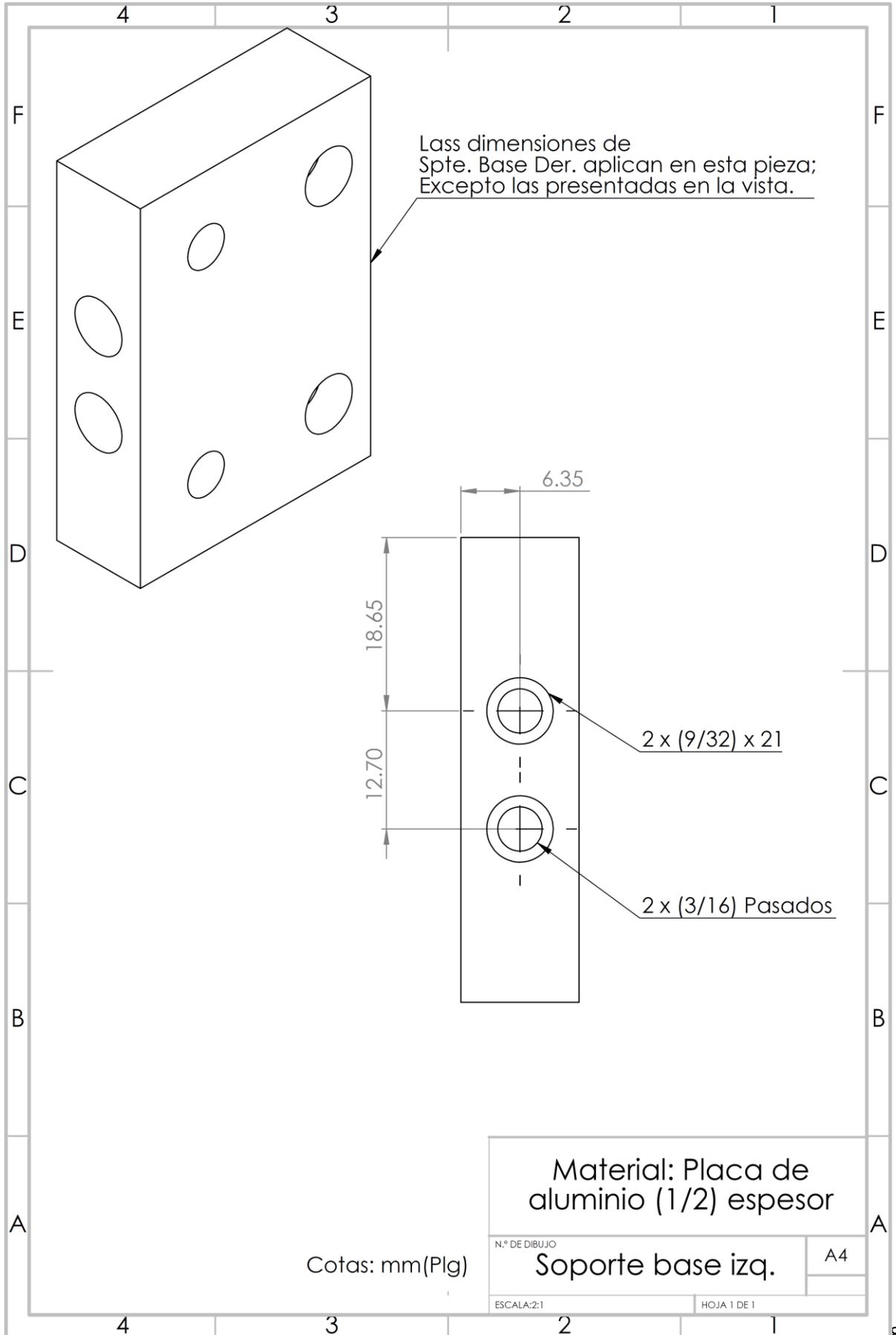
8. ANEXO A

8.1 Planos de la plataforma experimental en SolidWorks

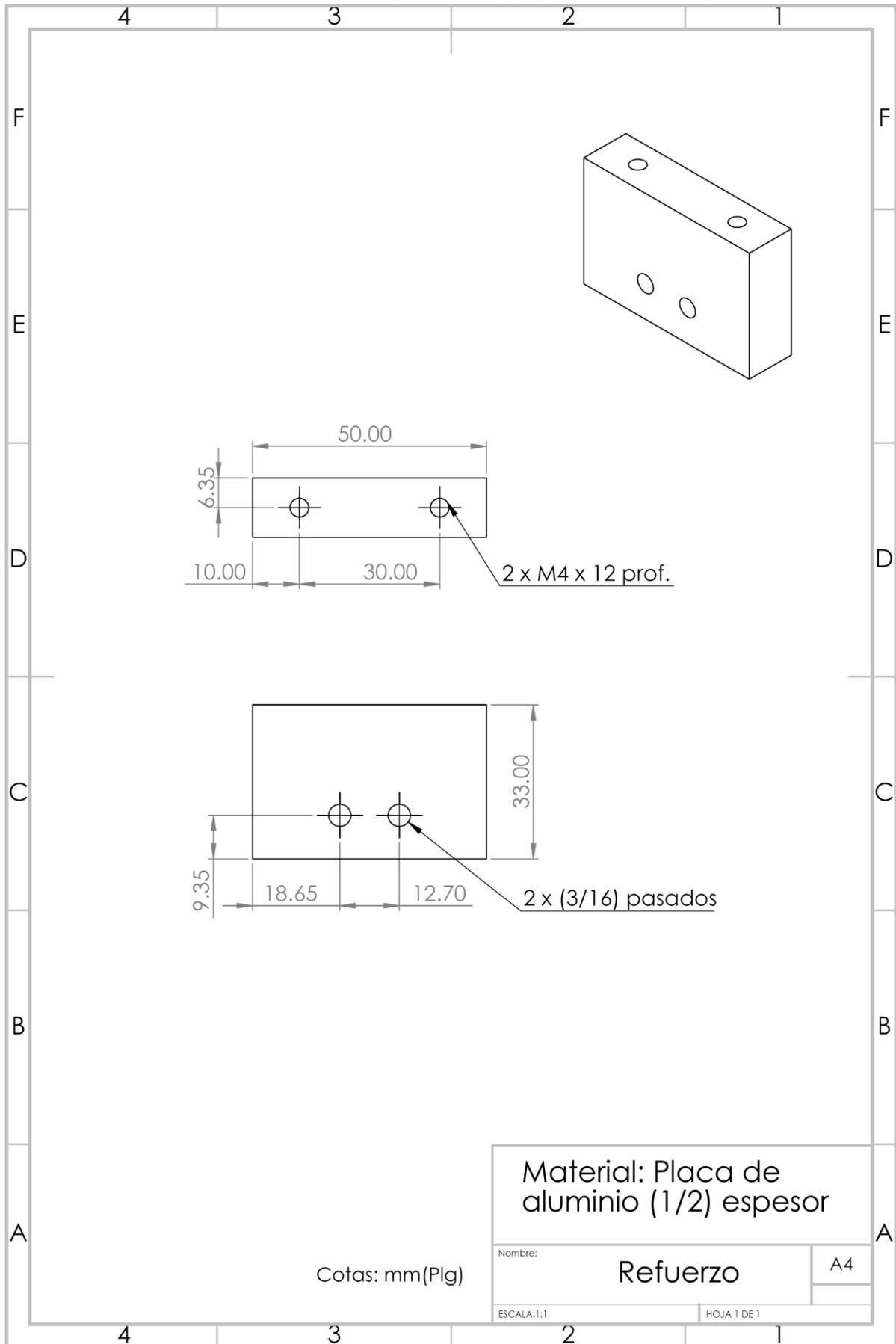
DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE UN ABSORBEDOR FLEXIBLE PARA EL CONTROL PASIVO DE VIBRACIONES EN UNA ESTRUCTURA TIPO EDIFICIO



DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE UN ABSORBEDOR FLEXIBLE PARA EL CONTROL PASIVO DE VIBRACIONES EN UNA ESTRUCTURA TIPO EDIFICIO



DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE UN ABSORBEDOR FLEXIBLE PARA EL CONTROL PASIVO DE VIBRACIONES EN UNA ESTRUCTURA TIPO EDIFICIO



Material: Placa de aluminio (1/2) espesor

Nombre:

Refuerzo

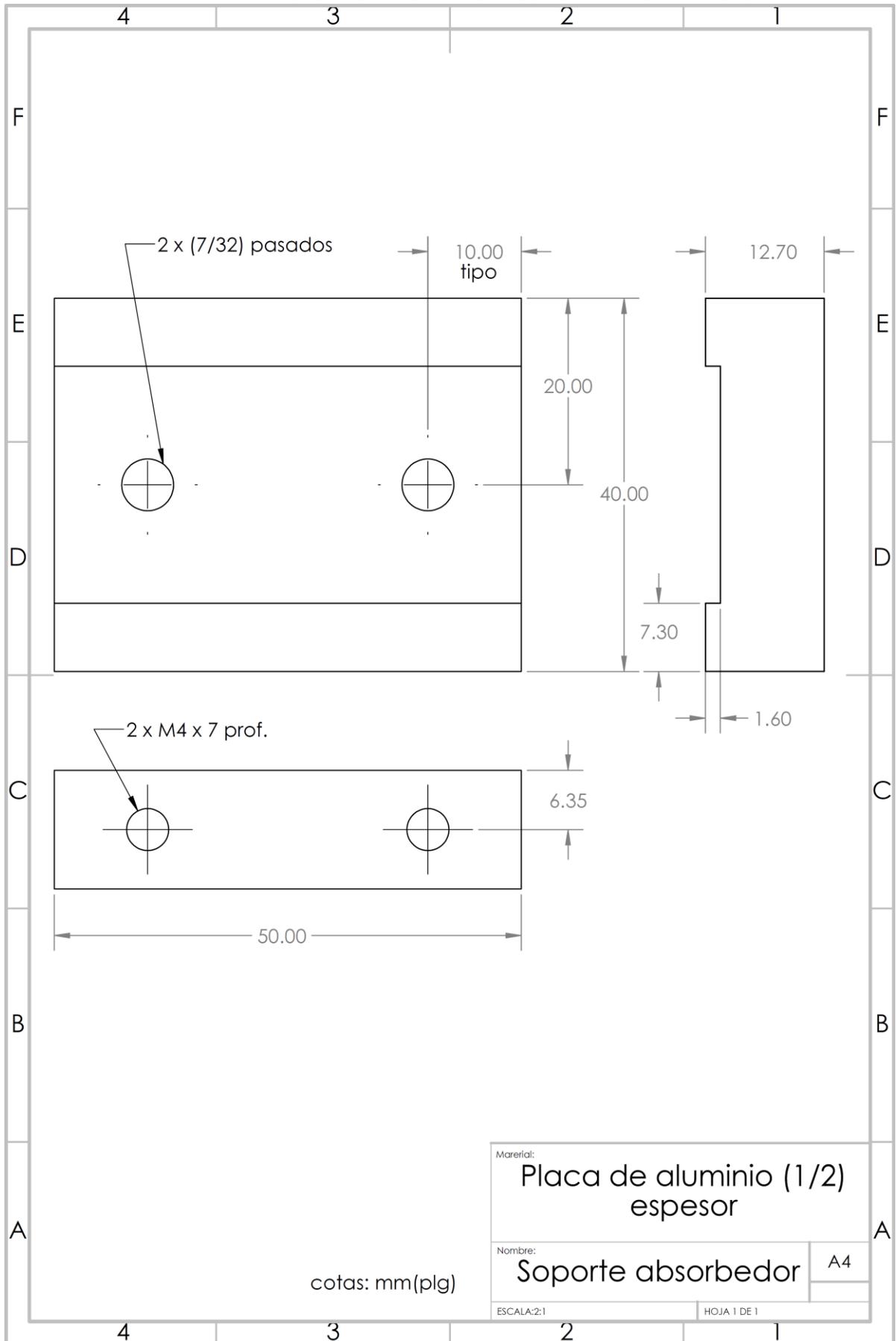
A4

ESCALA: 1:1

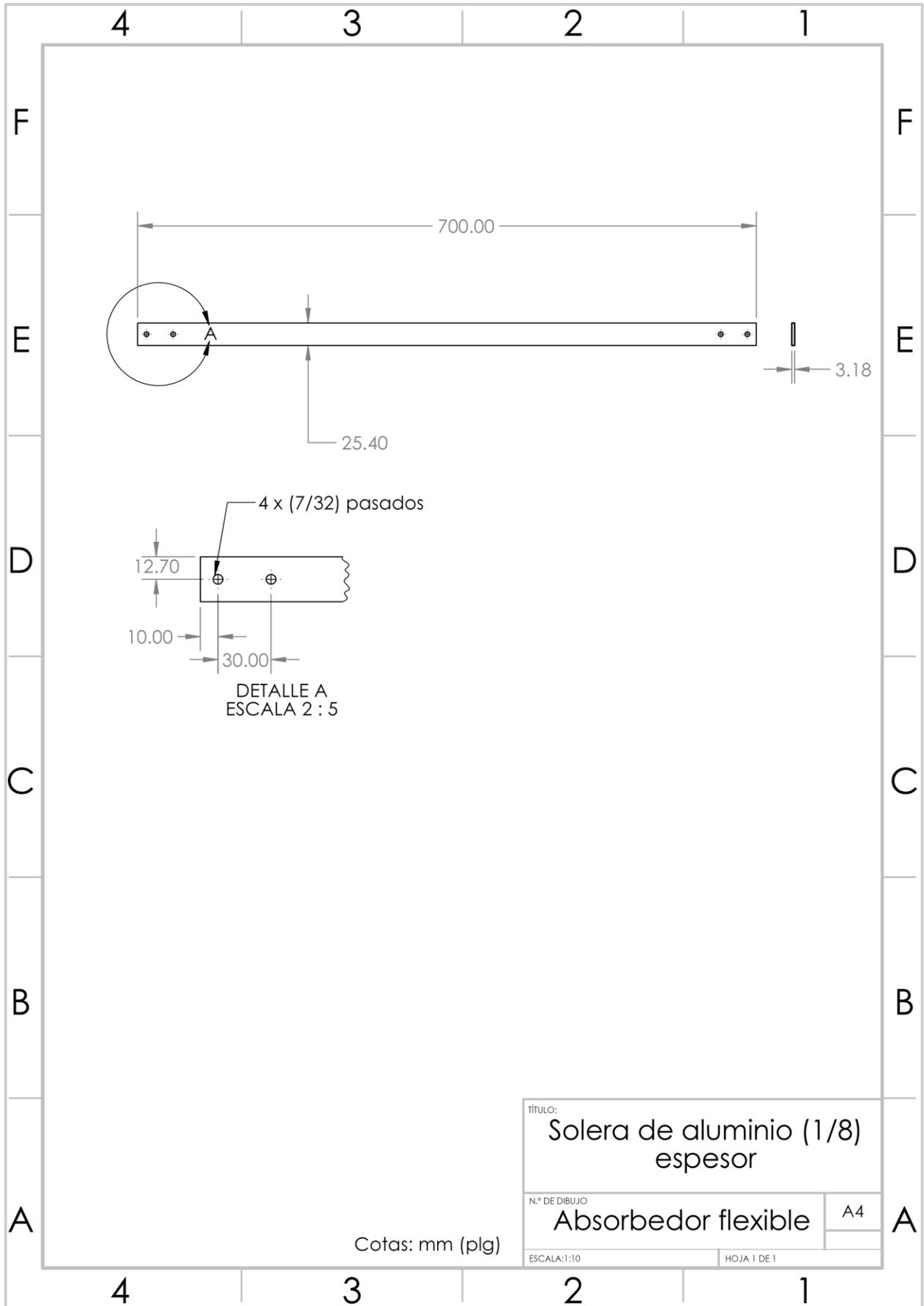
HOJA 1 DE 1

Cotas: mm(Plg)

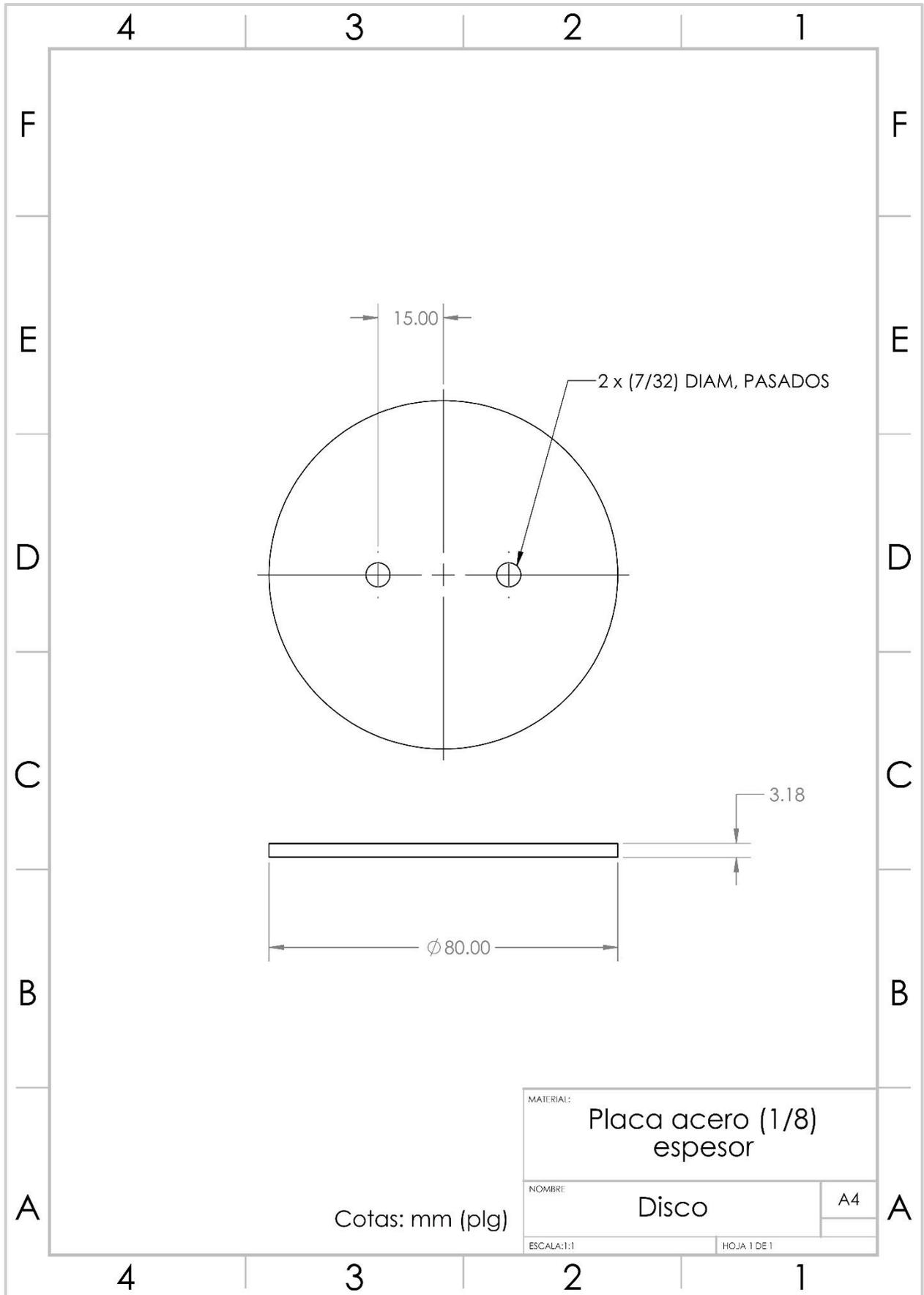
DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE UN ABSORBEDOR FLEXIBLE PARA EL CONTROL PASIVO DE VIBRACIONES EN UNA ESTRUCTURA TIPO EDIFICIO



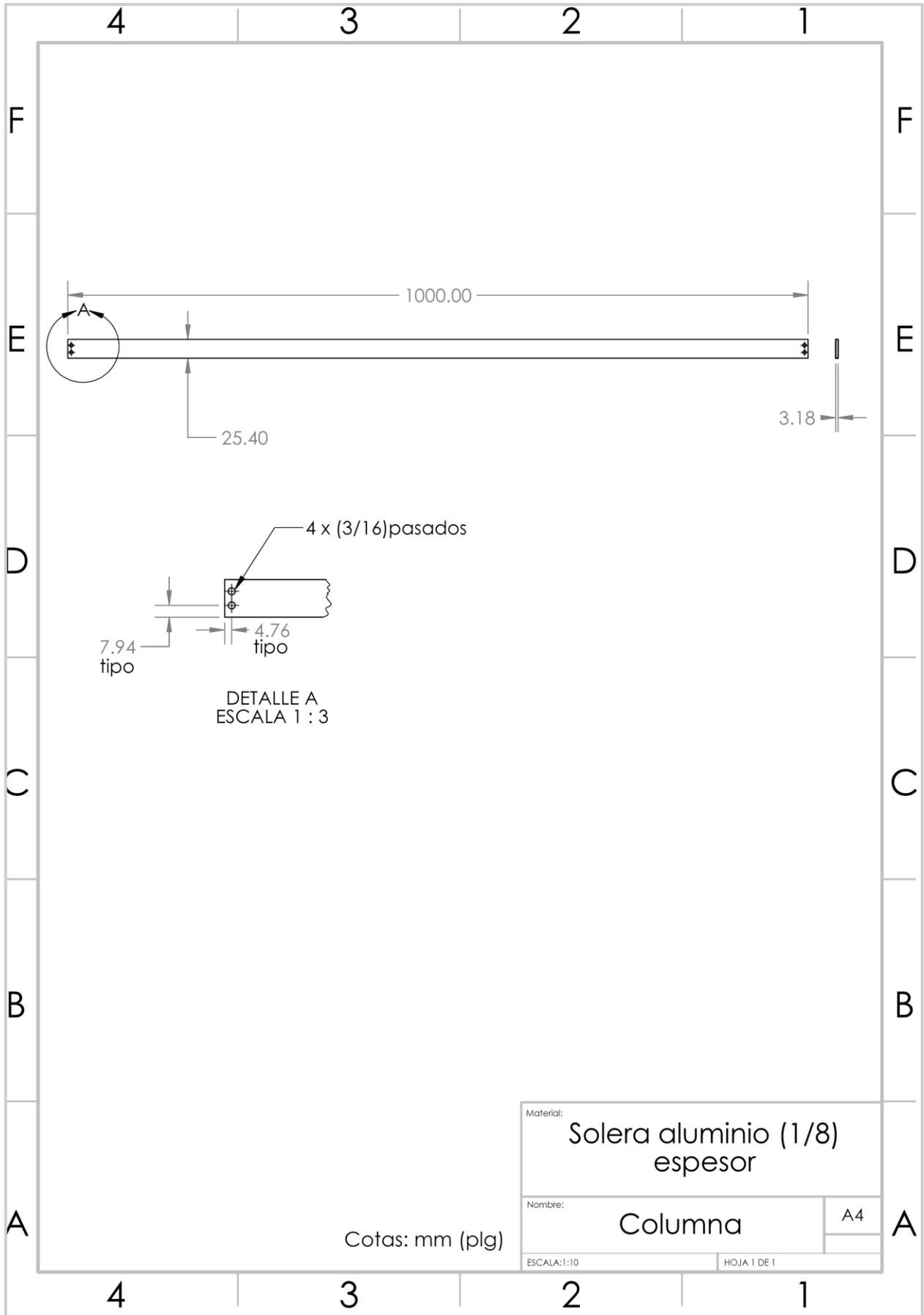
DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE UN ABSORBEDOR FLEXIBLE PARA EL CONTROL PASIVO DE VIBRACIONES EN UNA ESTRUCTURA TIPO EDIFICIO



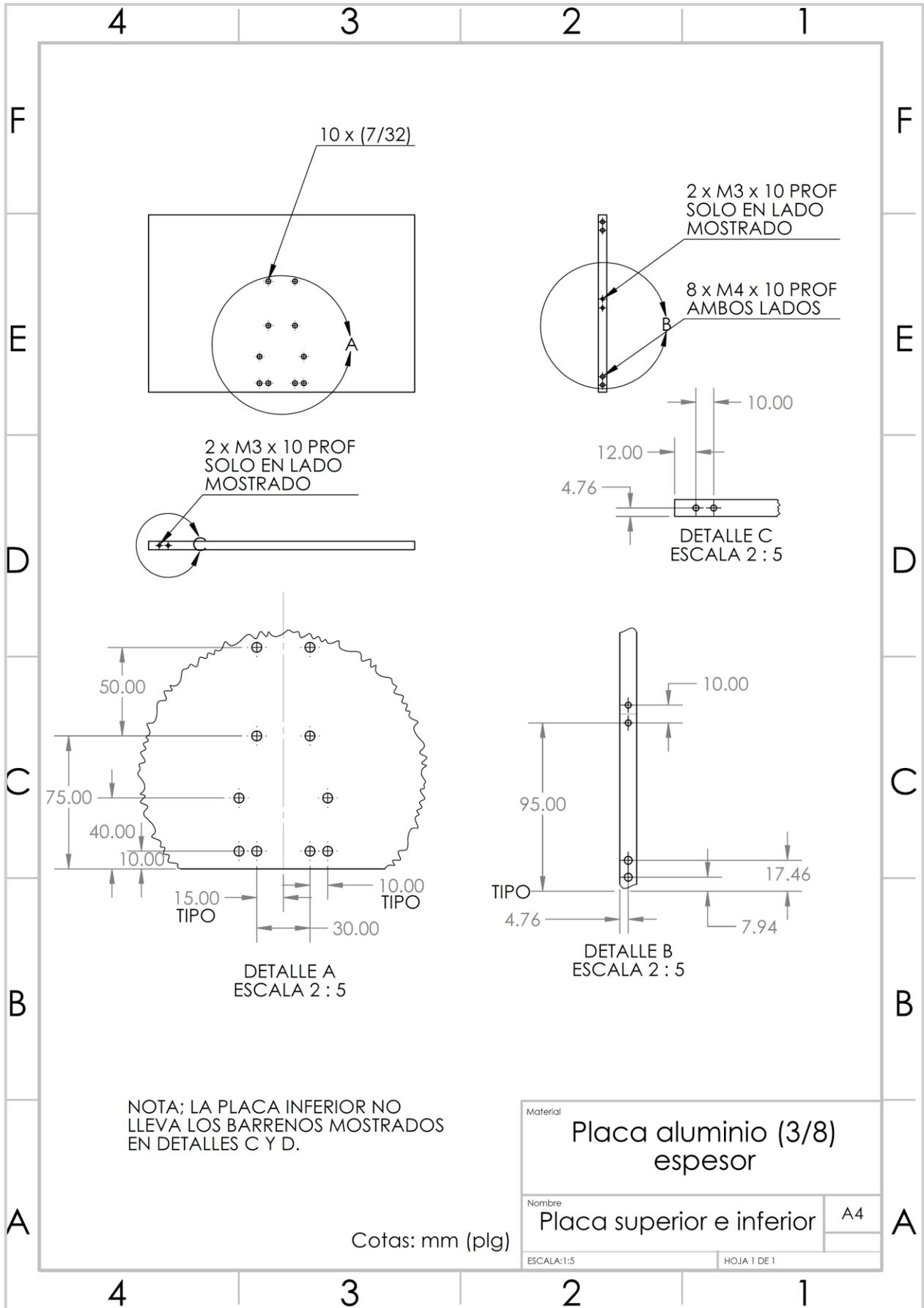
DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE UN ABSORBEDOR FLEXIBLE PARA EL CONTROL PASIVO DE VIBRACIONES EN UNA ESTRUCTURA TIPO EDIFICIO



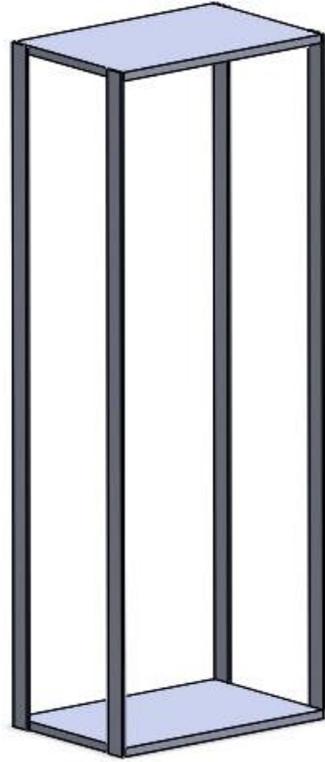
DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE UN ABSORBEDOR FLEXIBLE PARA EL CONTROL PASIVO DE VIBRACIONES EN UNA ESTRUCTURA TIPO EDIFICIO



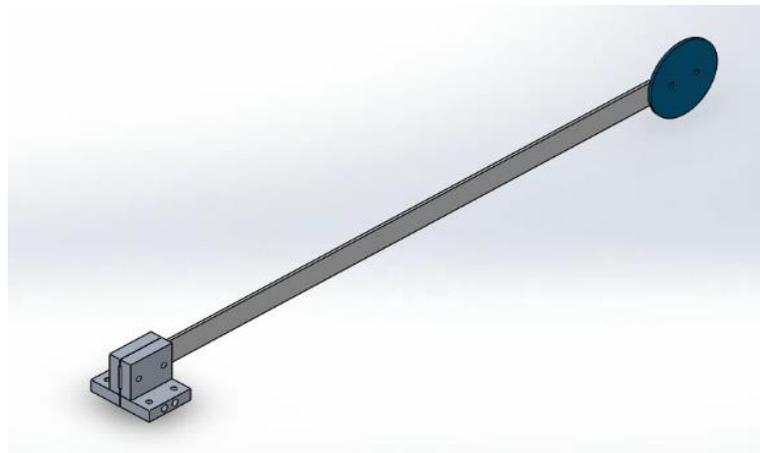
DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE UN ABSORBEDOR FLEXIBLE PARA EL CONTROL PASIVO DE VIBRACIONES EN UNA ESTRUCTURA TIPO EDIFICIO



DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE UN ABSORBEDOR FLEXIBLE PARA EL CONTROL PASIVO DE VIBRACIONES EN UNA ESTRUCTURA TIPO EDIFICIO

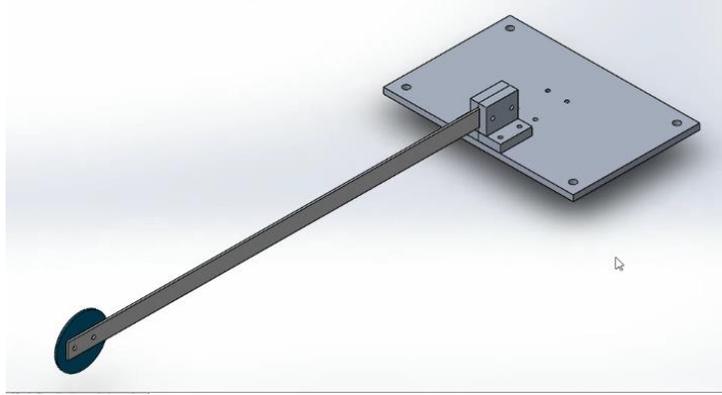


Arreglo del sistema primario con columnas de solera rectangular de aluminio

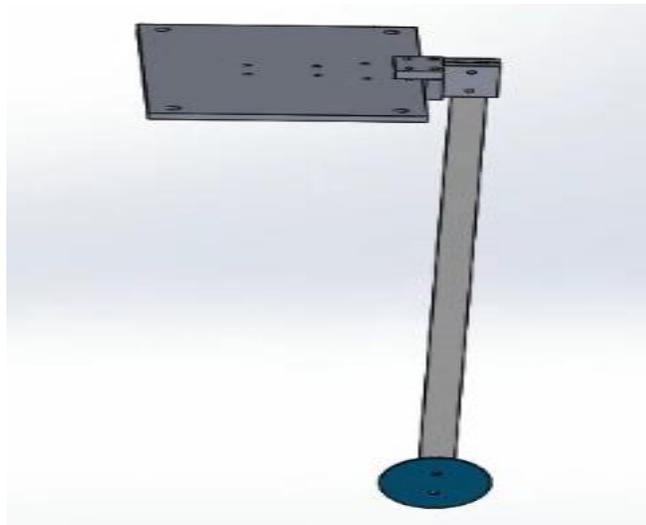


Ensamble disco-absorbedor flexible

DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE UN ABSORBEDOR FLEXIBLE PARA EL CONTROL PASIVO DE VIBRACIONES EN UNA ESTRUCTURA TIPO EDIFICIO



Absorbedor flexible con dinámica en plano horizontal



Absorbedor flexible con dinámica en plano vertical

9. ANEXO B

9.1 Programas utilizados

DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE UN ABSORBEDOR FLEXIBLE PARA EL CONTROL PASIVO DE VIBRACIONES EN UNA ESTRUCTURA TIPO EDIFICIO

Programa en Matlab-Simulink para obtener la respuesta en el tiempo de los modelos dinámicos utilizados

```
function Qpp=dinamica(u)
```

```
%Constantes
```

```
m1=1.5;  
m2=0.15;  
L=0.428343715;  
c1=1;  
c2=0;  
k=200;  
E=69e9;  
I=8.46825e-12;  
g=9.81;
```

```
%Entradas
```

```
q1=u(1);  
q2=u(2);  
q1p=u(3);  
q2p=u(4);  
a=u(5);  
TAU(1,1)=a;  
TAU(2,1)=0;  
Qp=[q1p;q2p];
```

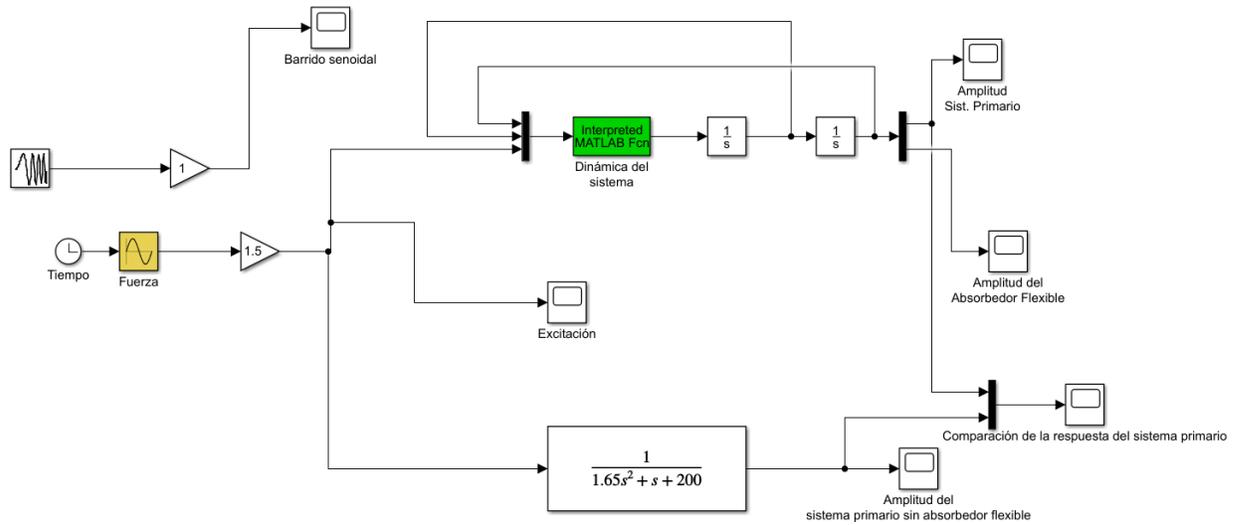
```
M(1,1)=m1+m2;  
M(1,2)=m2;  
M(2,1)=m2;  
M(2,2)=m2*(1+(36*q2^2/(25*L^2)));
```

```
C(1,1)=c1;  
C(1,2)=0;  
C(2,1)=0;  
C(2,2)=c2+(36*m2*q2*q2p/(25*L^2));
```

```
G(1,1)=(k*q1);  
G(2,1)=((3*E*I/L^3)*q2)-((6*g*m2/(5*L))*q2);
```

```
Qpp=M\ (TAU-C*Qp-G);
```

DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE UN ABSORBEDOR FLEXIBLE PARA EL CONTROL PASIVO DE VIBRACIONES EN UNA ESTRUCTURA TIPO EDIFICIO



Representación del modelo dinámico a simular en Simulink.

10. ANEXO C

10.1 Publicaciones

Los siguientes artículos fueron publicados con resultados desarrollados en el presente trabajo de tesis en los siguientes congresos internacionales:

- D.A. Flores-Sánchez, N. Flores-Morita, R.E. Campa-Cocom, L.G. Trujillo-Franco and H.F. Abundis-Fong. *Attenuation of Vibrations in a Mechanical Oscillator by Implementing Two Types of Vibration Absorbers: Experimental Results*, International Conference on Mechatronics, Electronics and Automotive Engineering, 2020. Estatus: Publicado. (DOI: 10.1109/ICMEAE51770.2020.00025).
- N. Flores-Morita, D.A. Flores-Sánchez, L.G. Trujillo-Franco, H.F. Abundis-Fong. *Control pasivo de una estructura tipo edificio utilizando un absorbedor flexible de vibraciones*. Congreso Internacional de la SOMIM 2021. Estatus: Aceptado para su publicación.

Attenuation of Vibrations in a Mechanical Oscillator by Implementing Two Types of Vibration Absorbers: Experimental Results

D.A. Flores-Sanchez
Postgraduate Division
TecNM/I.T. Pachuca
Pachuca, Hidalgo, México
d19201353@pachuca.tecnm.mx

N. Flores-Morita
Postgraduate Division
TecNM/I.T. Pachuca
Pachuca, Hidalgo, México
M75200366@pachuca.tecnm.mx

R.E. Campa-Cocom
Member, IEEE
Postgraduate Division
TecNM/I.T. La Laguna
Torreón, Coahuila, México
recampa@ieee.org

L.G. Trujillo-Franco
Department of Automotive Mechanical Engineering
Universidad Politécnica de Pachuca
Zempoala, Hidalgo, México
luis.trujillo@upp.edu.mx

H.F. Abundis-Fong
Postgraduate Division
TecNM/I.T. Pachuca
Pachuca, Hidalgo, México
hugo.af@pachuca.tecnm.mx

Abstract—This work deals with the vibration absorption problem on a flexible mechanical oscillator, discretized in one degree of freedom, by using linear and nonlinear absorbers. The passive control of the undesirable oscillations in the primary system is performed with a pendulum absorber (Tuned Mass Damper configuration) as well as by an autoparametric cantilever beam type. This attenuation approach is experimentally validated using a building-like structure which is mounted on a Stewart platform and harmonically excited on its base under resonant conditions and coupled to the two different vibration absorbers mentioned above. The action of the vibration absorption is evaluated from dynamic and frequency domain where the advantages and disadvantages of each passive vibration absorber are mentioned.

Index Terms—Passive vibration control; frequency response function; vibration experiments

I. INTRODUCTION

The study of structural control of mechanical vibrations in flexible structures like buildings or towers has recently become a research topic of relevant importance, especially in highly populated cities where civil structures are usually affected by the presence of transportation systems and seismic phenomena. One common method to address the issue of vibration control in mechanical structures is through passive techniques (linear or nonlinear devices), taking advantage of the physical properties of the system itself. In order to avoid the undesirable effects of the vibrations, this method modifies, mostly, the mass, damping and stiffness properties regarding to the initial configuration of the principal structure. Passive control techniques are characterized by the implementation of devices in structures that do not require any external energy source to reduce mechanical vibrations [1].

Within the approach of the linear passive vibration control, one of the widely used devices is the Tuned Mass Damper (TMD), which is an efficient passive vibration suppression device, comprising a mass, springs and viscous damper. A TMD is widely implemented because of its properties such as effectiveness, reliability and low costs, with applications such as machinery and civil structures [2].

The TMD was initially used at the beginning of the past century since its conceptualization was applied for the first time by Frahm to reduce the movement of the ships, as well as the vibrations of the ships hull [3]. After a major development on its dynamic behavior, the TMD was designed to control the structural dynamic response on different topics. Ormondroyd and Den Hartog [4] came upon that a TMD, with a damping element, can suppress the amplitude of the primary system in a wider frequency range, followed by a detailed discussion of the optimization that adjusts the damping parameters. In the literature, it is possible to find several real cases related to building structures containing TMD configurations not just for controlling the dynamic response on lateral loads, but also to mitigate the torsional displacement in the buildings with significant torsional coupling [5]. The simplicity of the tuned mass dampers makes them the most used devices for the vibration control in buildings with great height. Guo and Chen [6] proposed an innovative technique for using multiple TMDs to control partial loads on the ground in a limited number of floors. They indicated by using numerical results that the use of multiple TMDs can effectively alter the distribution of natural frequencies as well as reduce the frequency/transient responses of the structure. Nowadays, research related to the study and implementation of a TMD remains a current topic, for example, for vibration control of adjacent twin buildings

DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE UN ABSORBEDOR FLEXIBLE PARA EL CONTROL PASIVO DE VIBRACIONES EN UNA ESTRUCTURA TIPO EDIFICIO

or using it in combination with tapering method in order to control the dynamic response of super-tall buildings [7], [8].

On the other hand, the study of passive vibration control using nonlinear devices is an interesting subject, because of the phenomena that may occur and do not happen in their linear counterparts [9]. Usually, a nonlinear vibration absorber is implemented in order to overcome possible drawbacks due to the use of a TMD [10]. There is a class of nonlinear vibration absorber called autoparametric absorbers. This type of nonlinear systems differ from the traditional TMD, mainly because these have nonlinear coupling between at least two vibration modes, satisfying the so-called autoparametric condition (external and internal resonance condition), which are certainly related with parametric excitation. Autoparametric absorbers are specifically used where a primary system is being excited close to one of its principal parametric resonances, that is, the worst case situation in a physical structure. When the autoparametric interaction occurs between two subsystems there is a great energy transfer to the autoparametric absorber.

Autoparametric vibration absorbers have been designed to attenuate resonant vibrations due to the advantages that this type of systems present in their frequency response function in comparison with the classic vibration absorber (TMD). In Ibrahim and Heo [11] and Dahlberg [12] is shown how a continuous cantilever beam absorber with tip mass, oriented in the same direction with the motion of the primary system, can be implemented with better attenuation properties than those obtained with classical TMD. Cuvalci et al [13] defined an absorption region for an autoparametric vibration absorber for a single degree of freedom primary system under sinusoidal and random excitations. They experimentally determined the parameters that influence the effectiveness of the nonlinear vibration absorber. Hui and Ng [14] presented the implementation of autoparametric phenomena to reduce the symmetrical vibration of a curved beam/panel under external harmonic excitation showing that internal energy transfer of a first symmetric mode into first anti-symmetric mode in a curved panel is one example of autoparametric vibration absorber effect. Abundis-Fong et al [15] developed an optimum design of an autoparametric absorber coupled to a resonant oscillator where the implementation of the nonlinear absorber was obtained by using an approximation of the nonlinear frequency response function, computed via the multiple scales method. Recently, Ting Tan et al [16] used the nonlinear saturation principle and 1:2 internal resonance in the design of the piezoelectric autoparametric vibration absorber for vibration suppression and energy harvesting.

In this article, we are interested in implementing two different passive vibration control schemes for a flexible structure where the utility of each of these is stated in terms of the dynamic and frequency response of the overall system.

II. SYSTEM DESCRIPTION

The primary system consists of one rigid floor with mass m_1 which is connected to its base by flexible columns with equivalent stiffness k_{eq} and viscous damping c_1 . The primary

system is affected by an external harmonic ground acceleration $\ddot{x}_b(t) = -x_0\omega^2 \sin \omega t$ with amplitude $x_0\omega^2$ and excitation frequency ω .

In order to attenuate the harmonic vibrations because of the ground acceleration $\ddot{x}_b(t)$ (X direction) the following passive control schemes are used.

A. Tuned Mass Damper

A TMD is a mechanical device to be added to another mechanical system, often called the primary system, with the purpose of attenuating unwanted vibrations by introducing equal and opposite dynamics forces or by damping devices to dissipate energy. Basically, a conventional TMD consists of a single mass connected to the main structure by using another mechanical element. A schematic diagram of the building-like mechanical structure coupled with a TMD (pendulum type) is shown in Fig. 1. The secondary system (vibration absorber) is described in terms of the mass and length (m_2, L).

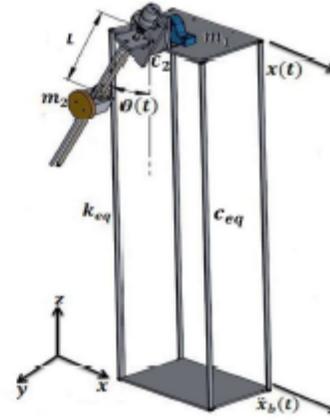


Fig. 1. Schematic diagram of the primary system with TMD.

The equations of motion of the overall system are obtained via Euler-Lagrange formulation, considering an external harmonic acceleration at the base of the primary system \ddot{x}_b , as follows:

$$\begin{aligned} (m_1 + m_2)\ddot{x} + m_2L\ddot{\theta} + c_1\dot{x} + kx &= -(m_1 + m_2)\ddot{x}_b(1) \\ m_2L\ddot{x} + m_2L^2\ddot{\theta} + c_2\dot{\theta} + m_2gL\theta &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

which in matrix form reads as

$$M\ddot{q} + C\dot{q} + Kq = Q(t) \quad (3)$$

DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE UN ABSORBEDOR FLEXIBLE PARA EL CONTROL PASIVO DE VIBRACIONES EN UNA ESTRUCTURA TIPO EDIFICIO

with

$$M = \begin{bmatrix} m_1 + m_2 & m_2 L \\ m_2 L & m_2 L^2 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & m_2 g L \end{bmatrix}$$

$$Q(t) = \begin{bmatrix} -(m_1 + m_2) \ddot{x}_b \\ 0 \end{bmatrix}$$

where $q = [x, \theta]^T$ is the vector of generalized coordinates, $Q(t)$ is the vector of exogenous forces, x and θ denote the longitudinal motion of the primary system and angular displacement of the vibration absorber. The dynamic model represented by (1) and (2) was obtained considering small oscillations about the equilibrium position $(0,0)$ as well as the mass of the rod of length L is assumed to be negligible. In this case, the governing equations are coupled to the non-zero off-diagonal terms in the mass matrix.

For a primary system with a single degree of freedom a TMD (pendulum type) can be designed to passively attenuate the first resonant vibration mode as follows

- Compute length l of the linear pendulum vibration absorber such that its uncoupled resonance frequency coincides with the first resonance frequency, i.e.,

$$\Omega = \omega_2 = \sqrt{gL^{-1}} \cong \omega_1 \quad (4)$$

- Select a proper viscous damping c_2 to guarantee the asymptotic stability and certain robustness against variations on the excitation frequency Ω .

B. Autoparametric Absorber

A functional passive vibration absorber extracts oscillatory energy from the primary system. This type of energy transfer is well established in autoparametric vibration. In the simplest case an autoparametric system can be thought of in two parts, the first being an externally excited forced oscillator and the second comprising an oscillator parametrically (a term appears as a time varying modification of a system parameter) excited by the response of the forced element. The fundamental requirement of an autoparametric system is coupling between modes (either two or more) in such a way that response relationships can be made to apply between the natural frequencies and also the frequency of external excitation [17]. A schematic diagram of the primary system coupled with a nonlinear vibration absorber (autoparametric type type) is shown in Fig. 2. The nonlinear absorber is composed by a thin beam attached over the primary system and with an equivalent mass m at the end with lateral motion restricted to a horizontal plane (i.e., gravity effects are not considered). The length l denotes the beam total length and c_2 is a small viscous damping on the beam. Both primary and secondary subsystems are coupled by means of the inertia resulted from the beam attachment.

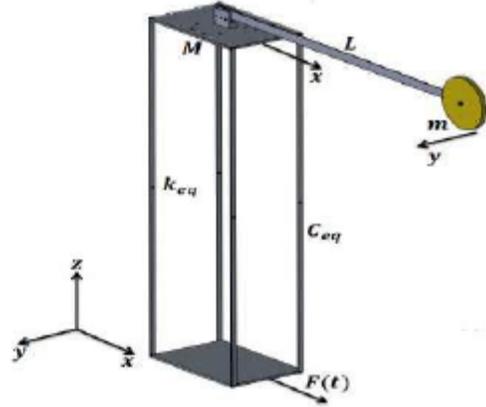


Fig. 2. Schematic diagram of the primary system with autoparametric absorber.

The equations of motion of the overall system are obtained by developing the Euler-Lagrange equations considering an external harmonic force $F(t)$ and linear viscous dampings, as follows

$$(M + m)\ddot{x} + c_1\dot{x} + kx - \frac{6m}{5l}(y\ddot{y} + \dot{y}^2) = F(t) \quad (5)$$

$$m\ddot{y} + c_2\dot{y} + \left[\frac{3EI}{L^3} - \frac{6m}{5L}\ddot{x} \right] y + \frac{36m}{25L^2}y[y\ddot{y} + \dot{y}^2] = 0 \quad (6)$$

The overall nonlinear passive vibration control scheme can be expressed in a more compact form (see (3)), where

$$M = \begin{bmatrix} M + m & -\frac{6m}{5L}y \\ -\frac{6m}{5L}y & m \left(1 + \frac{36}{25L^2}y^2 \right) \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} c_1 & -\frac{6m}{5L}\dot{y} \\ 0 & c_2 + \frac{36m}{25L^2}y\dot{y} \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{L^3} \end{bmatrix}$$

where x and y denote the longitudinal motion of the primary system and lateral displacement of the passive cantilever beam absorber, respectively. Furthermore, the parameters associated to the passive beam absorber are the modulus of Young E (aluminum), the area moment of inertia I and the total length L . It is important to note the highly nonlinear and coupled system dynamics in (5)-(6). In essence, the beam absorber is inertially coupled to the primary system in such a way that a proper tuning can lead to the autoparametric condition (two-mode nonlinear operation), where resonant harmonic forces can be attenuated.

On the other hand, for the presence of autoparametric interaction between the primary system and the nonlinear absorber (secondary system), by which the vibration absorption is obtained, the following expressions must be satisfied

$$\Omega = \omega_1 \quad (7)$$

$$\omega_1 = 2\omega_2 \quad (8)$$

DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE UN ABSORBEDOR FLEXIBLE PARA EL CONTROL PASIVO DE VIBRACIONES EN UNA ESTRUCTURA TIPO EDIFICIO

where Ω is the excitation frequency, ω_1 corresponds to the principal parametric frequency of the primary system and ω_2 is the natural frequency of the nonlinear absorber. These two expressions are well-known as the external and internal resonance conditions, respectively [18].

III. EXPERIMENTAL RESULTS

A series of experiments were performed considering a flexible structure discretized in one degree of freedom where vibration absorbers, described in the previous section, are implemented.

A. Primary system

Free vibration test (see Fig. 3) is conducted to identify the modal parameters (damping ratio and natural frequency) of the main structure. The frequency response function for the primary system is described in Figure 4. These modal parameters obtained from experimental modal analysis, by applying peak-picking method, are given in Table I.

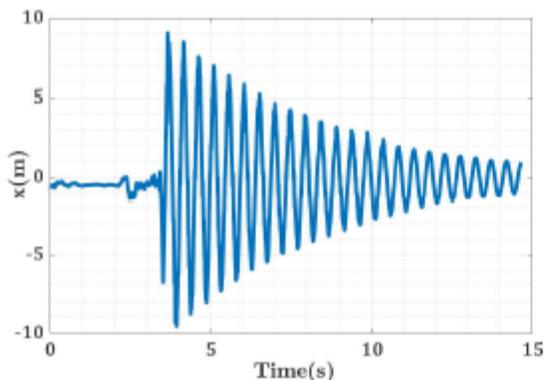


Fig. 3. Dynamic response of the primary system in free vibration test.

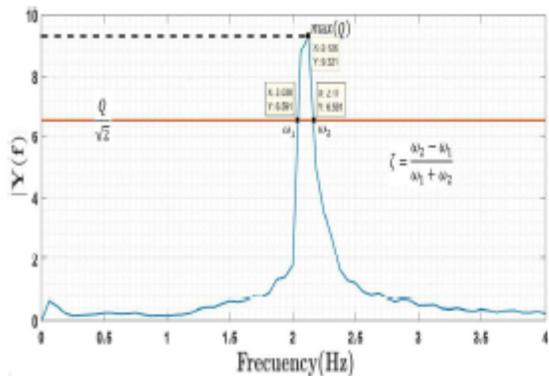


Fig. 4. Experimental FRF of the main structure.

TABLE I
MODAL PARAMETERS OF THE BUILDING-LIKE STRUCTURE.

Mode	Natural frequency [Hz]	Damping ratio
1	2.1268	0.028

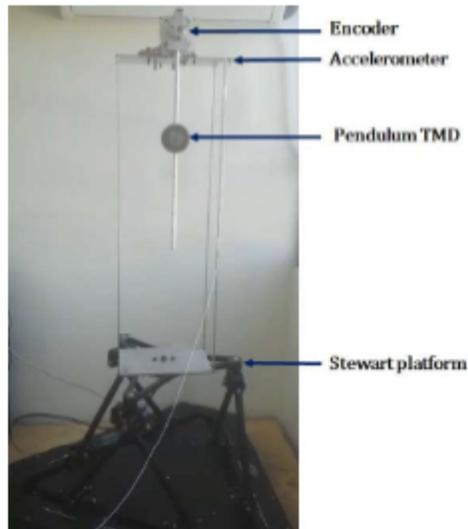


Fig. 5. Primary system with a TMD.

B. Implementation of a linear absorber

The experimental platform showing the primary system coupled with a pendulum absorber, configured to work as a TMD, is depicted in Fig. 5. The base of the structure is directly affected by harmonic motion generated by Stewart platform (hexapod) where the excitation frequency is equal to the resonance frequency of the primary system. The acceleration measurements are obtained on the main mass (m_1) using a low-cost sensor connected to a data acquisition system running on a PC with Matlab/Simulink platform.

Fig. 6 shows the dynamic response of the main structure under resonant conditions when the TMD is not tuned. It can be seen that the amplitude oscillations is close to 6 cm.

The attenuation of resonant vibrations, using pendulum vibration absorber when equation (4) is satisfied, is shown in Fig. 7. It is important to note that the percentage of vibration absorption is around 90%.

The experimental FRF of the primary system with TMD is described in Fig. 8, where is evident the modification of the original frequency response (see Fig. 4) and the good attenuation properties around the first vibration mode ($\omega = 2.1268$ Hz). According to Fig. 8, one can observe that a TMD is a passive control scheme which experiences an off-set in the FRF of the overall system. Therefore, for small changes in the excitation frequency ω , the motion of the overall system could be complicated and unstable due to proximity with respect to other resonance frequencies (in this case $\omega_1 = 1.7$

DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE UN ABSORBEDOR FLEXIBLE PARA EL CONTROL PASIVO DE VIBRACIONES EN UNA ESTRUCTURA TIPO EDIFICIO

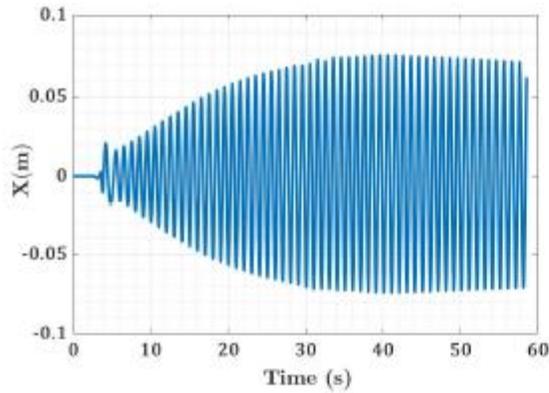


Fig. 6. Experimental response of the main structure without passive vibration control.

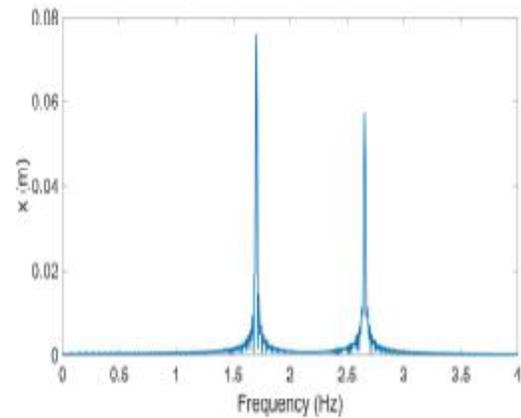


Fig. 8. Frequency response function of the main structure with TMD.

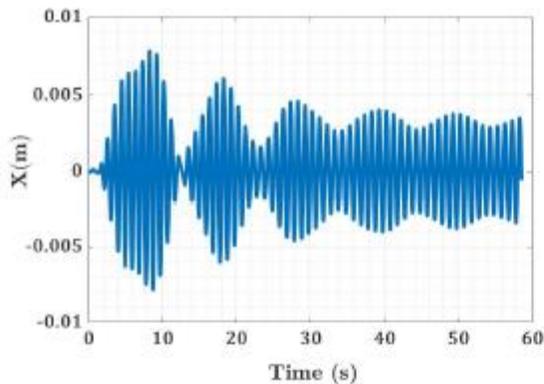


Fig. 7. Experimental response of the main structure with passive vibration control.

Hz and $\omega_2 = 2.6$ Hz). In summary, this alternative reduces the vibration amplitude into a narrow frequency bandwidth nevertheless for other values the system response could be increased.

C. Implementation of a nonlinear absorber

In this case the main structure is coupled to a nonlinear vibration absorber (autoparametric cantilever beam type). The experimental setup is depicted in Fig. 9. The dynamic response of primary system when the excitation frequency is twice the second parametric resonance frequency of the secondary system (see equation (8)) is described in Fig. 10. After the autoparametric interaction is presented, the steady-state amplitude of the building-like structure is approximately 2.2 cm and, therefore, the vibration absorption is 63%. In Fig. 11 is described the FRF of the primary system with autoparametric cantilever beam absorber, when the excitation is a sine swept.

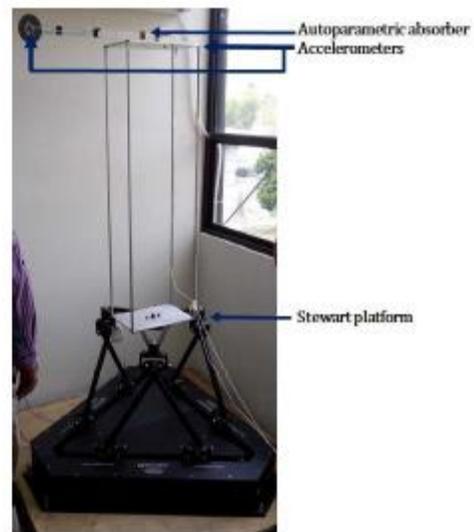


Fig. 9. Primary system with autoparametric absorber.

During this experiment the autoparametric conditions ((7) and (8)) are not achieved, which are only possible when both conditions are simultaneously satisfied in a steady-state operation.

It is important to note that the application of the autoparametric cantilever beam absorber is particularly efficient when it is necessary to mitigate specific resonance conditions without producing high amplitudes or resonance conditions at other excitation frequency. However, the use of an autoparametric absorber makes the dynamics of the entire system highly nonlinear for analysis and design purposes, which complicates its implementation.

DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE UN ABSORBEDOR FLEXIBLE PARA EL CONTROL PASIVO DE VIBRACIONES EN UNA ESTRUCTURA TIPO EDIFICIO

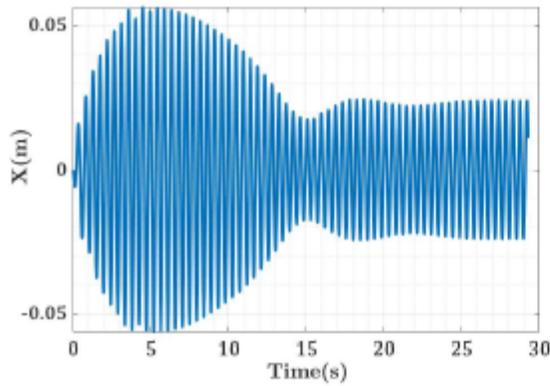


Fig. 10. Experimental response of the main structure with autoparametric interaction.

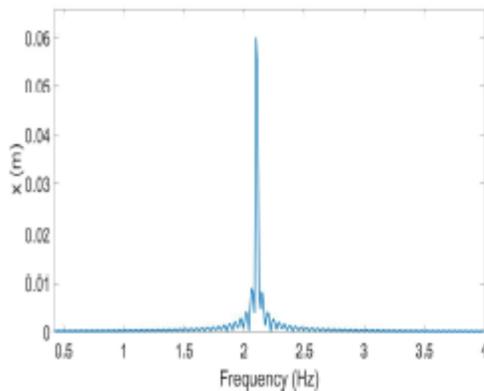


Fig. 11. Frequency response function of the main structure with nonlinear absorber.

IV. CONCLUSIONS

In this paper, we have described and experimental study of a passive vibration control scheme applied to a single degree of freedom mechanical oscillator under resonant harmonic excitation using a Tuned Mass Damper (TMD) and autoparametric cantilever-beam absorber. It can be concluded that the application of a nonlinear vibration absorber (autoparametric type) is efficient in primary systems subjected to broadband excitation frequency, when it is necessary to attenuate a specific resonance dynamic condition. It is important to note that the autoparametric vibration absorber works only close to the adjustable frequency and does not result in high amplitudes or resonance conditions at other frequencies, in contrast to the classical dynamic vibration absorber (TMD type), which is adequately close to its tuning frequency (antiresonance) but yields more resonances at other frequencies. Finally, further

work is being conducted to design an autoparametric absorber with different configurations applied on the orientation of the beam coupled to the building-like structure (with multiple degrees of freedom) and considering a Hilbert transform analysis of the Frequency Response Function (FRF) to determine the influence of this particular absorber on the dynamic system response.

REFERENCES

- [1] Enríquez-Zárate, J., Abundis-Fong, H.F., Velazquez, R., and Gutierrez, S., "Passive vibration control in a civil structure: Experimental results", *Measurement and Control*, vol. 52, pp. 938-946, 2019.
- [2] Korenev, B.G.; Reznikov, L.M. *Dynamic Vibration Absorber: Theory and Technical Applications*; Wiley, London, UK, 1993.
- [3] Frahm, H. *A device for damping vibrations of bodies*; US Patent 989958, 1911.
- [4] Ormondroyd, J., and Den Hartog J.P., "The theory of the dynamic vibration absorber", *ASME Journal of Applied Mechanics*, vol. 50, pp. 9-22, 1928.
- [5] Jangid, R.S., and Datta T.K., "Performance of multiple tuned mass dampers for torsionally coupled system", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, vol. 26, no. 3, pp. 307-317, 1998.
- [6] Guo, Y.Q., and Chen W.Q., "Dynamic analysis of space structures with multiple tuned mass dampers", *Engineering Structures*, vol. 29, no. 12, pp. 3390-3403, 2007.
- [7] Seung-Yong, O., "Tuned mass damper asymmetric coupling system for vibration control of adjacent twin buildings", *Advances in Structural Engineering*, vol. 23, no. 5, pp. 954-968, 2019.
- [8] Khodale, N., "Vibration control of super-tall buildings using combination of tapering method and TMD system", *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, vol. 196, 104031, 2020.
- [9] Ibrahim, R.A., "Recent advances in nonlinear passive vibration isolators", *Journal of Sound and Vibration*, vol. 314, no. 3-5, pp. 371-452, 2008.
- [10] Feudo, S.L., Touzé, C., Boisson, J., and Cumunel, G., "Nonlinear magnetic vibration absorber for passive control of a multi-storey structure", *Journal of Sound and Vibration*, vol. 438, pp. 33-53, 2019.
- [11] Ibrahim, R.A., and Heo, H., "Autoparametric vibration of coupled beams under random support motion", *ASME Journal of Vibration and Acoustics*, vol. 108, no. 4, pp. 421-426, 1986.
- [12] Dahlberg, T., "On optimal use of the mass of a dynamic vibration absorber", *Journal of Sound and Vibration*, vol. 132, no.3, pp. 518-522, 1989.
- [13] Cuvaci, O., Ertas, A., and Ekworo-Osire, S., "Nonlinear vibration absorber for a system under sinusoidal and random excitation: Experiments", *Journal of Sound and Vibration*, vol. 249, no.4, pp. 701-718, 2002.
- [14] Hui, C.K., and Ng, C.F., "Autoparametric vibration absorber effect to reduce the first symmetric mode vibration of a curved beam/panel", *Journal of Sound and Vibration*, vol. 330, no. 18-19, pp. 4551-4573, 2011.
- [15] Abundis-Fong, H.F., Enríquez-Zárate, J., Cabrera-Amado, A., and Silva-Navarro, G., "Optimum design of a nonlinear vibration absorber coupled to a resonant oscillator: A case study", *Shock and Vibration*, vol. 2018, pp. 1-11, 2018.
- [16] Ting, T., Yan, Z., Zou, Y., and Zhang, W., "Optimal dual-functional design for a piezoelectric autoparametric vibration absorber", *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 123, 513-532, 2019.
- [17] Cartmell, M.O. *Introduction to Linear, Parametric and Nonlinear Vibrations*; Chapman and Hall, London, UK, 1990.
- [18] Nayfeh, A.H.; Mook, D.T. *Nonlinear Oscillations*; Wiley, New York, 1979.

DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE UN ABSORBEDOR FLEXIBLE PARA EL CONTROL PASIVO DE VIBRACIONES EN UNA ESTRUCTURA TIPO EDIFICIO

MEMORIAS DEL XXVII CONGRESO INTERNACIONAL ANUAL DE LA SOMIM
22 al 24 DE SEPTIEMBRE DE 2021 PACHUCA, HIDALGO, MÉXICO

Tema A3a. Mecánica Teórica: *Dinámica Estructural*

“Control pasivo de una estructura tipo edificio utilizando un absorbedor flexible de vibraciones.”

N. Flores-Morita^a, D.A. Flores-Sánchez^a, L.G. Trujillo-Franco^b, H.F. Abundis-Fong^{a,*}

^aTecnológico Nacional de México/I.T. de Pachuca, Pachuca Hgo C.P. 42080, México.

^bÁrea de Ingeniería Mecánica Automotriz, Universidad Politécnica de Pachuca, Zempoala Hgo C.P. 43830, México.

*Autor contacto. Dirección de correo electrónico: hugo.af@pachuca.tecnm.mx

RESUMEN

Este artículo considera el análisis teórico y numérico en la respuesta dinámica de una estructura tipo edificio cuando se le acopla un absorbedor flexible de vibraciones en configuración viga en voladizo tomando en cuenta los efectos gravitatorios asociados a éste. El modelo matemático del sistema completo se obtiene utilizando el formulismo de Euler-Lagrange considerando al absorbedor flexible como un sistema generalizado de un grado de libertad. Aplicando la Transformada de Hilbert a la función de respuesta frecuencial se demuestra que las no-linealidades presentes en el modelo dinámico no contribuyen de manera significativa en el desempeño del absorbedor implementado; por lo tanto, es válido llevar a cabo una linealización de las ecuaciones de movimiento para determinar la condición de sintonización entre el absorbedor y la estructura tipo edificio. Se proporcionan algunos resultados en simulación para mostrar el rendimiento eficiente del esquema de absorción de vibraciones propuesto.

Palabras Clave: Control pasivo de vibraciones, Viga en voladizo, Transformada de Hilbert.

ABSTRACT

This paper considers the theoretical and numerical analysis in the dynamic response of a building-like structure when it is coupled to a flexible vibration absorber in cantilever beam configuration taking into account the gravitational effects associated with this. The mathematical model of the complete system is obtained using the Euler-Lagrange formulation considering the flexible vibration absorber as a generalized system of one degree of freedom. Applying a Hilbert transform analysis to the Frequency Response Function, it is shown that the nonlinearities present in the dynamic model do not contribute significantly to the performance of the absorber implemented, therefore, it is valid to carry out a linearization of the equations of motion to determine the tuning condition between the absorber and the primary system. Some simulation results are provided to show the efficient performance of the proposed vibration absorption scheme.

Keywords: Passive vibration control, Cantilever beam, Hilbert Transform.

1. Introducción

Los dispositivos de control de vibraciones se pueden clasificar en sistemas de control pasivos, activos e híbridos. Las tecnologías comúnmente adoptadas para controlar la vibración, reducir el daño y, en general, mejorar el rendimiento estructural, incluyen, entre otras: amortiguación, aislamiento de vibraciones, control de las fuerzas de excitación y el absorbedor de vibraciones. El amortiguador de masa sintonizado (TMD, por sus siglas en inglés) empezó a ser estudiado a principios del siglo pasado, desde que su conceptualización fue aplicada por primera vez por Frahm [1,2].

Los absorbedores pasivos TMD, se han convertido en una herramienta extremadamente útil para proteger las

estructuras de vibraciones impredecibles, debido a sus principios relativamente simples y su optimización de rendimiento relativamente fácil; como se muestra en numerosas aplicaciones exitosas recientes, tanto en construcciones nuevas como en algunas ya existentes [2-4]. Los esquemas pasivos son también conocidos como disipadores de energía. El TMD es un tipo de mecanismo pasivo, diseñado para reducir una frecuencia particular o modo de vibración de una estructura. Este desarrollo se compone de una masa, un resorte y un amortiguador; los cuales representan el sistema secundario, instalado en una estructura (sistema primario), para minimizar su movimiento o desplazamiento completamente. Un sistema pasivo TMD es cualquier topología (estructura matemática que permite la definición formal de conceptos como convergencia, conectividad, continuidad, vecindad, usando

DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE UN ABSORBEDOR FLEXIBLE PARA EL CONTROL PASIVO DE VIBRACIONES EN UNA ESTRUCTURA TIPO EDIFICIO

MEMORIAS DEL XXVII CONGRESO INTERNACIONAL ANUAL DE LA SOMEM
22 al 24 DE SEPTIEMBRE DE 2021 PACHUCA, HIDALGO, MEXICO

subconjuntos de un conjunto dado) que no contiene un elemento activo; como es un actuador, dando como resultado que estos sistemas sean enteramente mecánicos [5]. Durante las últimas tres décadas, los amortiguadores de masa sintonizados han sido ampliamente utilizados en la práctica, entre otros dispositivos y configuraciones para amortiguamiento estructural con la intención de atenuar las vibraciones inducidas por el viento en edificios de gran altura cumpliendo con el criterio de rendimiento de comodidad de los ocupantes establecidos en códigos y directrices de construcción [6]. Hoy en día, los sistemas TMD son comúnmente utilizados en estructuras como: soportes de puentes, automóviles o edificios altos y virtualmente, en cualquier sistema donde la supresión de vibraciones es requerida [2,5].

Por otro lado, el estudio del control pasivo de vibraciones usando dispositivos no lineales es un tema interesante, debido a los fenómenos que pueden ocurrir y que no se presentan en su contraparte lineal [7,8]. Por lo general, se utiliza un absorbedor no lineal de vibraciones para superar posibles inconvenientes debido a la implementación de un amortiguador de masa sintonizado [9-11]. Los absorbedores de vibraciones no lineales han sido objeto de numerosos estudios. Haxton y Barr fueron los primeros en proponer un absorbedor de vibraciones pasivo no lineal basado en el fenómeno autparamétrico [12]. Civalci y Ertas [13] realizaron la implementación de un absorbedor pendular sobre una viga flexible en voladizo mostrando de manera numérica y experimental la alta efectividad del absorbedor cuando la condición autparamétrica se presenta. Un tipo de dispositivo que se ha implementado recientemente para mejorar el desempeño del TMD es conocido como sumidero no lineal de energía (NES, por sus siglas en inglés) el cual consta de una masa pequeña acoplada a un oscilador por medio de un amortiguador y un resorte con función de rigidez no lineal [14,15]. Debido a la existencia de una fuerza de restauración no lineal, el NES es capaz de interactuar con la estructura primaria virtualmente en cualquier frecuencia [16-18]. Recientemente, la teoría de aislamiento de vibraciones usando dispositivos con comportamiento no lineal ha sido testigo de importantes desarrollos debido a las demandas apremiantes de protección de instalaciones estructurales, reactores nucleares, componentes mecánicos e instrumentos sensibles contra movimientos sísmicos, choques, así como cargas de impacto [8].

En este trabajo se realiza el análisis teórico y numérico de la implementación de un absorbedor flexible de vibraciones en configuración viga en voladizo para una estructura tipo edificio discretizada en un grado de libertad.

2. Descripción del sistema

La figura 1 muestra el diagrama esquemático del sistema mecánico. El sistema primario consiste de un piso rígido con masa M conectado a la placa de la base por columnas flexibles con rigidez equivalente k la cual es obtenida considerando cuatro elementos elásticos en paralelo, con

rigidez lateral individual $12EI_{col}/L^3$, donde E representa el módulo de Young (aluminio), momento de inercia de área I_{col} y longitud L [19]. Este sistema primario es afectado por una aceleración armónica en la base $\ddot{x}_b = -x_{b0}\omega^2 \sin\omega t$ con amplitud $x_{b0}\omega^2$ y frecuencia de excitación ω .

Con la intención de atenuar las vibraciones armónicas producidas por \ddot{x}_b (en la dirección X) se utiliza un absorbedor flexible tipo viga en voladizo (sistema secundario) con masa m en el extremo libre y movimiento lateral x_2 , el cual se configura de manera vertical sobre la masa del sistema primario. La dinámica del sistema secundario se restringe al plano X-Y.

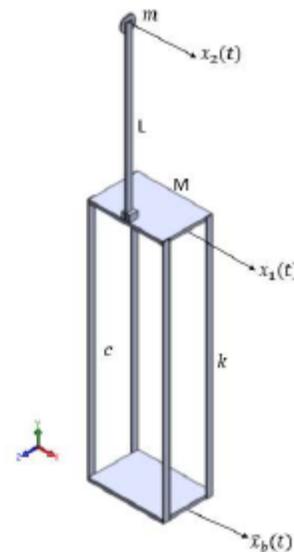


Figura 1 – Diagrama esquemático de la estructura tipo edificio con absorbedor flexible de vibraciones tipo viga en voladizo.

2.1. Ecuaciones de movimiento

Debido a que el absorbedor implementado en este trabajo de investigación es un sistema de parámetros distribuidos (configuración viga en voladizo con masa m en el extremo libre) es necesario obtener un modelo dinámico que describa de mejor manera su comportamiento cuando éste se acopla a la estructura tipo edificio. Ya que solo se tiene interés en el modo de vibración fundamental del sistema secundario (primer modo de vibración), es posible tratar al absorbedor flexible de vibraciones como un sistema generalizado de un grado de libertad de parámetros discretos, en el que la coordenada generalizada sea el desplazamiento lateral de la masa m que se encuentra en el extremo libre del absorbedor ($x_2(\tau)$). [20]

Utilizando la teoría de sistemas generalizados de un grado de libertad (sistemas que en principio tienen un número infinito de grados de libertad, los cuales, introduciendo una configuración de deformación, se pueden abordar como si fueran de un grado de libertad), el desplazamiento lateral

DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE UN ABSORBEDOR FLEXIBLE PARA EL CONTROL PASIVO DE VIBRACIONES EN UNA ESTRUCTURA TIPO EDIFICIO

MEMORIAS DEL XXVII CONGRESO INTERNACIONAL ANUAL DE LA SOMIM
22 al 24 DE SEPTIEMBRE DE 2021 PACHUCA, HIDALGO, MEXICO

asociado a m se puede representar por [19]

$$v(x, t) = \phi(x)x_2(t) \quad (1)$$

donde $\phi(x)$ es conocida como la función de forma, la cual representa de manera aproximada la geometría en la que el absorbedor flexible de vibraciones estará vibrando. Para este caso se escoge $\phi(x)$ como la función que describe la curva de deflexión de una viga en voladizo debido a una carga estática en el extremo libre de la misma (ver figura 2) [21], por lo tanto

$$\phi(x) = \frac{3}{2L^2}x^2 - \frac{1}{2L^3}x^3 \quad (2)$$

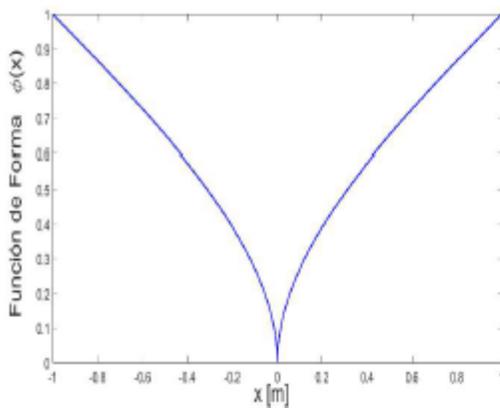


Figura 2 – Patrón de deformación considerado para el absorbedor flexible de vibraciones.

La energía cinética total del sistema es la suma de la energía cinética asociada al movimiento de traslación de M más la energía cinética asociada a la masa m en el extremo libre de la viga,

$$T = \frac{1}{2}M\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{w}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{x}_1 + \dot{x}_2)^2 \quad (3)$$

donde w denota el desplazamiento axial (contracción) de la masa m a lo largo del eje Y , el cual está directamente relacionado con el desplazamiento lateral $x_2(t)$ de la misma masa por la siguiente expresión [11]

$$w = \frac{1}{2} \int_0^L \left(\frac{\partial x_2}{\partial x} \right) dx \quad (4)$$

Además, \dot{x}_1, \dot{x}_2 representan la derivada con respecto al tiempo de los desplazamientos asociados a cada uno de los grados de libertad del sistema (ver Fig. 1).

La energía potencial total del sistema consiste de la energía

potencial asociada a las columnas presentes en el sistema primario, a la energía de deformación debido a la flexión de la viga esbelta (sistema secundario) y a la energía potencial gravitacional de la masa m [11,19]

$$V = \frac{1}{2}k_{eq}x_1^2 + \frac{1}{2}EI \int_0^L \left(\frac{\partial^2 x_2}{\partial x^2} \right)^2 dx - mgw \quad (5)$$

donde k_{eq} es la rigidez equivalente de las cuatro columnas, el producto de EI es la rigidez a la flexión del absorbedor de vibraciones implementado y g es la aceleración debido a la gravedad. Sustituyendo la ec. (1) en las ecs. (4) y (5), resulta

$$V = \frac{1}{2}k_{eq}x_1^2 + \frac{1}{2}EIx_2^2 \int_0^L \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right)^2 dx \quad (6)$$

$$- \frac{1}{2}mgx_2^2 \int_0^L \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 dx$$

Empleando las ecs. (3) y (6) se obtiene el Lagrangiano del sistema ($L = T - V$), el cual está dado por

$$L(x_1, \dot{x}_1, x_2, \dot{x}_2) = \frac{1}{2}M\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m(\dot{x}_1 + \dot{x}_2)^2 + \frac{1}{2}m \left[\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2}x_2^2 \int_0^L \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 dx \right] \right]^2 - \frac{1}{2}k_{eq}x_1^2 - \frac{1}{2}EIx_2^2 \int_0^L \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right)^2 dx + \frac{1}{2}mgx_2^2 \int_0^L \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 dx \quad (7)$$

Para obtener las ecuaciones de movimiento del sistema completo se aplica la ecuación de Euler-Lagrange para cada grado de libertad, considerando una aceleración armónica en la base de la estructura y amortiguamiento viscoso por cada coordenada generalizada, como se muestra (para mayor detalle, ver apéndice A):

$$\begin{aligned} (M + m)\ddot{x}_1 + m\ddot{x}_2 + c_1\dot{x}_1 + k_{eq}x_1 &= (M + m)\ddot{x}_s \sin \omega t \\ m\ddot{x}_1 + m \left(1 + \frac{36}{25L^2}x_2^2 \right) \ddot{x}_2 + \left(c_2 + \frac{36m}{25L^2}x_2\dot{x}_2 \right) \dot{x}_2 + \left(\frac{3EI}{L^3} - \frac{6mg}{5L} \right) x_2 &= 0 \end{aligned} \quad (8)$$

donde x_1, x_2 denotan el movimiento longitudinal del sistema primario y el desplazamiento lateral del absorbedor

DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE UN ABSORBEDOR FLEXIBLE PARA EL CONTROL PASIVO DE VIBRACIONES EN UNA ESTRUCTURA TIPO EDIFICIO

MEMORIAS DEL XXVII CONGRESO INTERNACIONAL ANUAL DE LA SOMEM
22 al 24 DE SEPTIEMBRE DE 2021 PACHUCA, HIDALGO, MEXICO

flexible de vibraciones, respectivamente. Es importante notar la no linealidad en el modelo dinámico descrito por (8). En esencia, el sistema secundario está acoplado inercialmente al sistema primario de tal forma que una sintonización adecuada entre ambos subsistemas puede conducir a la atenuación de las oscilaciones resonantes en la estructura tipo edificio causadas por $\ddot{x}_b(t)$.

La dinámica del sistema completo se puede representar en una forma más compacta,

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = \tau(t) \quad (9)$$

donde $q = [x_1, x_2]^T$, es el vector de coordenadas generalizadas, $\tau = [-(M+m)\ddot{x}_b, 0]^T$ es el vector de fuerzas externas con $\ddot{x}_b(t) = -\omega^2 x_{b0} \text{sen} \omega t$. Además, $M(q)$ representa la matriz de inercia, $C(q, \dot{q})$ es el vector de términos centrífugos y de Coriolis (el cual también incluye las fuerzas disipativas asociadas a los amortiguamientos viscosos), y $G(q)$ denota el vector de fuerzas gravitacionales como sigue

$$M(q) = \begin{bmatrix} (M+m) & m \\ m & m + \frac{36m}{25L^2} x_2^2 \end{bmatrix}$$

$$C(q, \dot{q})\dot{q} = \begin{bmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 + \frac{36m}{25L^2} x_2 \dot{x}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}$$

$$G(q) = \begin{bmatrix} k_{eq} & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{L^3} - \frac{6}{5L} mg \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

2.2. Condición de sintonización

Para obtener la condición de sintonización entre el absorbedor flexible de vibraciones y la estructura tipo edificio se desprecian las no linealidades presentes en (8) y se supone que $c_1 \approx c_2 \approx 0$, dando como resultado

$$(M+m)\ddot{x}_1 + m\ddot{x}_2 + k_{eq}x_1 = (M+m)\ddot{x}_b$$

$$m\ddot{x}_1 + m\ddot{x}_2 + \left(\frac{3EI}{L^3} - \frac{6mg}{5L} \right) x_2 = 0 \quad (10)$$

Si se proponen soluciones armónicas para cada grado de libertad de la forma $x_1(t) = A \text{sen} \omega t$, $x_2(t) = B \text{sen} \omega t$ y se sustituyen con sus respectivas derivadas en (10), resulta

$$\left[k_{eq} - (M+m)\omega^2 \right] A - m\omega^2 B = F_o$$

$$-m\omega^2 A + \left[\frac{3EI}{L^3} - \frac{6}{5L} mg - m\omega^2 \right] B = 0$$

Debido a que se tiene interés en reducir la amplitud del sistema primario, se fija $A = 0$, entonces

$$\omega^2 = \frac{3EI}{L^3 m} - \frac{6g}{5L}$$

Si el sistema primario antes de la adición del absorbedor flexible de vibraciones, opera cerca de su resonancia, el absorbedor se diseña de modo que

$$\omega^2 = \frac{k_{eq}}{M} = \frac{3EI}{L^3 m} - \frac{6g}{5L} \quad (11)$$

Por cuestiones de simplicidad, se escoge como parámetro de sintonización la longitud del absorbedor flexible (L) cuyo valor se obtiene al encontrar las raíces de la siguiente ecuación

$$\omega^2 L^3 + \frac{6g}{5} L^2 - \frac{3EI}{m} = 0 \quad (12)$$

3. Resultados en Simulación

Se realizaron simulaciones numéricas para mostrar el desempeño del absorbedor flexible de vibraciones acoplado a la estructura tipo edificio considerando ambos modelos dinámicos (ver ecs. (9) y (10)). Los parámetros considerados del sistema completo se muestran en la Tabla 1.

Tabla 1 – Parámetros del sistema.

Parámetro	Valor	Unidad
Masa sistema primario (M)	1.5	kg
Masa sistema secundario (m)	0.15	kg
Rigidez equivalente (k_{eq})	200	N/m
Coefficiente de amortiguamiento en sistema primario (c_1)	1	Kg/s
Coefficiente de amortiguamiento en sistema secundario (c_2)	0.1	Kg/s
Modulo de Elasticidad (E)	69	GPa
Momento de Inercia de Area (I)	8.468×10^{-12}	m ⁴
Longitud (L)	0.4283	m
Frecuencia de excitación (ω)	1.7522	Hz
Amplitud de la aceleración en la base ($x_{b0}\omega^2$)	0.909	m/s ²

La figura 3 muestra la comparación de la respuesta dinámica asociada al desplazamiento lateral de la estructura tipo

DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE UN ABSORBEDOR FLEXIBLE PARA EL CONTROL PASIVO DE VIBRACIONES EN UNA ESTRUCTURA TIPO EDIFICIO

MEMORIAS DEL XXVII CONGRESO INTERNACIONAL ANUAL DE LA SOMIM
22 al 24 DE SEPTIEMBRE DE 2021 PACHUCA, HIDALGO, MEXICO

edificio cuando $\omega = \omega_{n1}$. En esta gráfica se puede observar que el porcentaje de absorción de vibraciones es alto y muy parecido en ambos modelos matemáticos obtenidos.

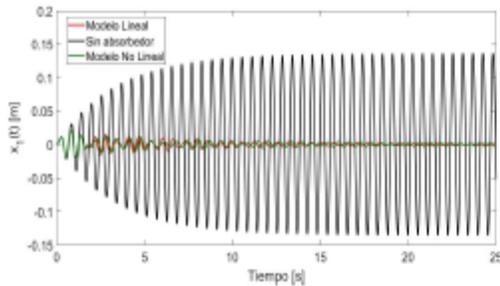


Figura 3 – Respuesta dinámica del sistema primario con y sin absorber flexible de vibraciones.

La figura 4 muestra la respuesta dinámica del grado de libertad asociado al desplazamiento lateral del absorber flexible de vibraciones ($x_2(t)$) cuando se sintoniza de tal manera que atenúe las oscilaciones resonantes del sistema primario considerando, de nueva cuenta, ambos modelos dinámicos. Es evidente que la diferencia entre ambas respuestas es muy pequeña.

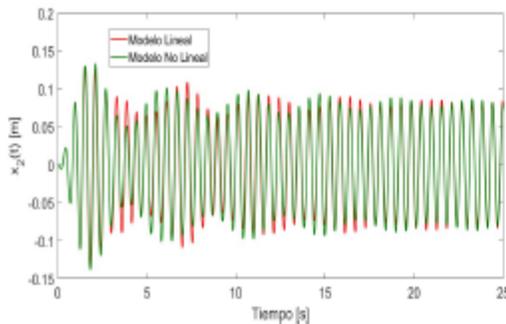


Figura 4 – Respuesta temporal del sistema secundario.

La respuesta temporal del desplazamiento de la estructura tipo edificio (con y sin sistema secundario acoplado) cuando se somete a un barrido senoidal en su base con amplitud constante y frecuencia variable de 0 a 5 Hz se muestra en la figura 5. Cuando se aplica el algoritmo de la Transformada Rápida de Fourier (FFT, por sus siglas en inglés) a las respuestas temporales presentadas en la figura 5, se obtienen las Funciones de Respuesta Frecuencial (FRF) del sistema primario, las cuales se muestran en la figura 6. Se observa que el sistema primario, cuando no está acoplado al absorber flexible de vibraciones, presenta su amplitud máxima en un valor de frecuencia igual a $\omega = \omega_{n1} = 1.75 \text{ Hz}$.

Una vez que el sistema secundario se diseña para atenuar la respuesta dinámica de la estructura tipo edificio en este valor

de frecuencia usando la ec. (12), lo que antes era un pico se convierte en un valle, con la desventaja de que se genera un par de amplitudes máximas alrededor de la frecuencia de sintonización, por lo tanto, el absorber flexible de vibraciones tipo viga en voladizo solo puede atenuar la amplitud de las vibraciones resonantes del sistema primario en un ancho de banda reducido alrededor de su frecuencia de diseño por lo que éste carece de robustez ya que un cambio en la frecuencia de excitación puede provocar, de nueva cuenta, oscilaciones resonantes en la estructura tipo edificio. De hecho, este comportamiento es similar al absorber clásico de vibraciones tipo TMD, con la diferencia de que el absorber flexible, por su geometría, es más fácil de diseñar e implementar en comparación con un sistema masa-resorte-amortiguador o un péndulo.

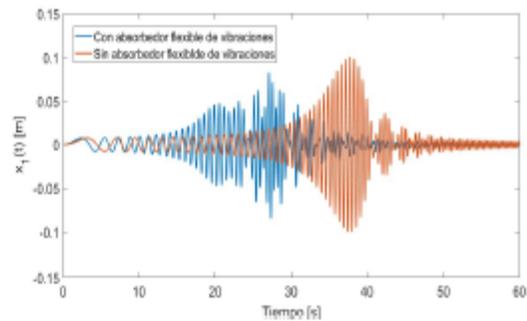


Figura 5 – Respuesta dinámica del sistema primario ante un barrido sinusoidal.

Si se quisiera incrementar el ancho de banda del absorber flexible, se tendría que implementar un esquema de control semi-activo de vibraciones en él, de tal forma que fuera posible cambiar alguno de sus parámetros (rigidez o longitud) en tiempo real para permitir la resintonización automática, entre el sistema secundario y primario, ante posibles cambios en la frecuencia de excitación.

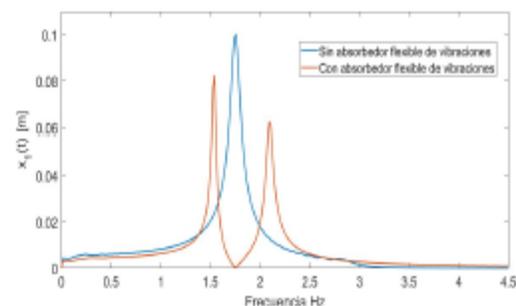


Figura 6 – Función de Respuesta Frecuencial de la estructura tipo edificio.

La figura 7 muestra la Función de Respuesta Frecuencial del sistema secundario cuando éste se encuentra acoplado al sistema primario. En esta gráfica se valida la condición de

DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE UN ABSORBEDOR FLEXIBLE PARA EL CONTROL PASIVO DE VIBRACIONES EN UNA ESTRUCTURA TIPO EDIFICIO

MEMORIAS DEL XXVII CONGRESO INTERNACIONAL ANUAL DE LA SOMM
22 al 24 DE SEPTIEMBRE DE 2021 PACHUCA, HIDALGO, MEXICO

sintonización proporcionada por la ec. (11), es decir, $\omega_{n2} = \omega_{n1} = \omega = 1.75 \text{ Hz}$.

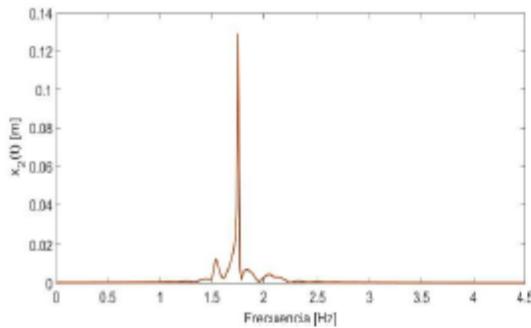


Figura 7 - Función de Respuesta Frecuencial del sistema secundario.

4. Análisis de no linealidades

El análisis de la respuesta en frecuencia de los sistemas mecánicos vibratorios ofrece una herramienta teórico-práctica, con un fundamento experimental y tecnológico muy bien conocido y respaldado para la determinación de la respuesta dinámica de dichos sistemas. Aunado a este análisis dinámico, descrito en términos de frecuencias naturales, factores de amortiguamiento y patrones de desplazamiento, existe un creciente interés de la comunidad científica y de los especialistas en diseño mecánico, en la determinación de la presencia de comportamiento no lineal, en los sistemas objeto de análisis y su influencia en el comportamiento del sistema bajo un conjunto de condiciones de operación específicas [22,23] (una determinada amplitud de fuerzas de excitación, amplitudes máximas de aceleración o deformaciones máximas permitidas).

La transformada de Hilbert es una herramienta para el procesamiento de señales que no es nueva y tampoco es nuevo su uso en el tema del análisis de la respuesta dinámica de los sistemas mecánicos, sujetos al fenómeno vibratorio [24]. La transformada de Hilbert, para una función de respuesta en frecuencia (FRF) está definida por la expresión:

$$H\{FRF(\omega)\} = -\frac{1}{i\pi} \varphi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{FRF(\omega)}{\omega - \omega_p} d\omega \quad (13)$$

donde $H\{FRF(\omega)\}$ es la transformada de Hilbert de la función de respuesta en frecuencia FRF. El coeficiente φ denota el valor principal de Cauchy para la integral, el uso de esta constante es necesario debido al hecho de que el integrando tiene una singularidad en el punto $\omega = \omega_p$.

Cuando se aplica la transformación de Hilbert a una FRF en específico, la parte imaginaria y la parte real de la FRF están relacionadas como:

$$\text{Re}(FRF(\omega)) = -\frac{1}{\pi} \varphi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{Im}(FRF(\omega))}{\omega - \omega_p} d\omega \quad (14)$$

$$\text{Im}(FRF(\omega)) = \frac{1}{\pi} \varphi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{Re}(FRF(\omega))}{\omega - \omega_p} d\omega \quad (15)$$

Las expresiones (14) y (15) son conocidas como los pares de Hilbert. Para sistemas no lineales, estas dos relaciones no son válidas, como consecuencia, la transformada de Hilbert devolverá una versión distorsionada de la FRF original, de manera que, se tiene un indicador de no-linealidad por medio del análisis del nivel de distorsión en la FRF original. Para realizar esta mencionada comparación entre la FRF original y su versión distorsionada, es de gran utilidad el cálculo del coeficiente de correlación cruzada como se define a continuación

$$\mu_H = \|\mathfrak{R}_{HF}(0)\|^2 \quad (16)$$

Donde $\|\mathfrak{R}_{HF}(0)\|$ es el coeficiente de correlación cruzada normalizado, aquí F es la FRF del sistema y H es la Transformada de Hilbert de F y \mathfrak{R}_{HF} se define por:

$$\mathfrak{R}_{HF}(\Delta\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega)F(\omega + \Delta\omega) d\omega \quad (17)$$

La expresión definida en (16) y (17) es un indicador de la no-linealidad del sistema a una amplitud específica. Es posible utilizar este índice para estudiar la presencia de no-linealidades en el sistema bajo análisis de manera que entre más se aleje de la unidad el valor del índice μ_H mayor comportamiento no lineal tendrá el sistema, esto es, para un sistema lineal, el valor esperado para μ_H es exactamente 1. Es necesario considerar algún criterio para discernir correctamente el rango de este valor, es posible considerar un valor de $0.9 \leq \mu_H \leq 1$ para asumir linealidad en el sistema, como se reporta a detalle en [24] y [25].

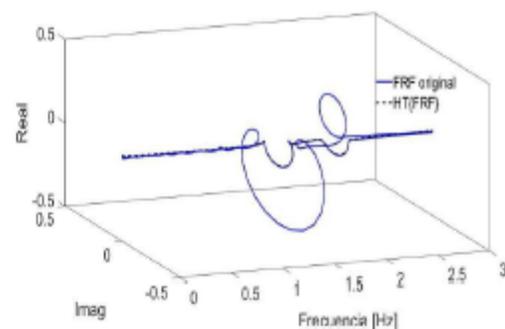


Figura 8- FRF original y su transformada de Hilbert.

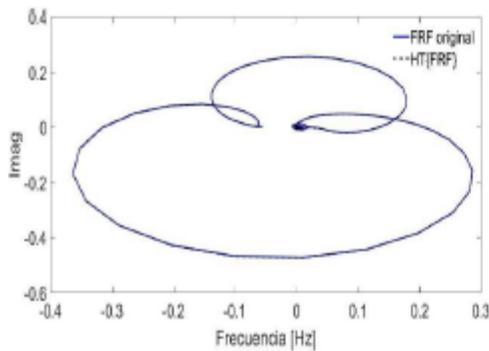


Figura 9- Diagrama de Nyquist de la FRF original y su transformada de Hilbert.

En la figura 8 se muestra, en forma tridimensional, la función de respuesta en frecuencia del sistema primario de la figura 1, cuyo comportamiento dinámico lo describe la ec. (9). La función de respuesta en frecuencia muestra un comportamiento lineal para el sistema aún en presencia del absorbedor de vibraciones, cuya dinámica es inherentemente no lineal. Los círculos que se observan corresponden a las resonancias o frecuencias naturales del sistema completo y corresponden a los picos de las FRF mostrada en la figura 6.

Por otra parte, en la figura 8 se muestra en línea punteada, en forma tridimensional, la transformada de Hilbert de la FRF original del sistema, mostrada en la misma figura, en línea continua azul. En la figura 9 se muestra en detalle, una comparación gráfica entre el diagrama de Nyquist que corresponde a la FRF original del sistema, en línea azul y el diagrama de Nyquist que corresponde a la transformación de Hilbert de la misma FRF, en línea negra punteada. Como se puede observar, no existe una distorsión apreciable en una primera inspección visual, lo que induce a pensar en un sistema predominantemente lineal.

El cálculo del coeficiente o índice de no linealidad, como se define en (16), proporciona el siguiente resultado:

$$\mu_H = 0.97 \quad (18)$$

Dado que se cumple que $0.9 \leq \mu_H \leq 1$ es posible concluir linealidad en el comportamiento en frecuencia del sistema, aún en presencia del absorbedor no lineal de vibraciones y por lo tanto, la condición de sintonización propuesta, entre sistema primario y el absorbedor flexible de vibraciones, es válida.

5. Conclusiones

En este artículo se abordó el control pasivo de vibraciones en una estructura tipo edificio utilizando un absorbedor

flexible tipo viga en voladizo. El absorbente propuesto muestra muy buen desempeño en o alrededor de su frecuencia de diseño, pero presenta, como principal desventaja, la generación de un par de frecuencias naturales alrededor de la frecuencia de sintonización por lo que no resulta conveniente la aplicación de este tipo de esquema de absorción pasiva de vibraciones si la fuente de excitación no es constante o posee múltiples componentes frecuenciales. Esta desventaja coincide con esquemas similares reportados en la literatura, e.g., absorbedores tipo masa-resorte y pendular (ambos en configuración TMD) donde es bien sabido que este inconveniente se debe al tipo de acoplamiento, ya sea inercial o elástico, presente entre ambos subsistemas; en este caso, debido al modelo dinámico que se obtuvo, el acoplamiento que se tiene entre sistema primario y secundario es del tipo inercial (ver ecuación (10)). En cuanto al análisis de no linealidad, el indicador de no linealidad probado es fácil de programar y aplicar al análisis de funciones de respuesta en frecuencia, donde el criterio propuesto para asumir linealidad en el sistema es $\mu_H \geq 0.9$, como se explica detalladamente en [24]. El resultado obtenido en este trabajo para el índice de no linealidad, permite concluir de manera formal y cuantitativa, un comportamiento predominantemente lineal del sistema completo con la consecuente confiabilidad y respetabilidad del desempeño dinámico en cuanto a la absorción de vibraciones.

Apéndice A.

En este apéndice se resuelven las derivadas y evalúan las integrales que se muestran en la ec. (7)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial x} &= \frac{3}{L^2}x - \frac{3}{2L^3}x^2 \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} &= \frac{3}{L^2} - \frac{3}{L^3}x \\ \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2 &= \frac{9}{L^4}x^2 - \frac{9}{L^5}x^3 + \frac{9}{4L^6}x^4 \\ \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\right)^2 &= \frac{9}{L^4} - \frac{18}{L^5}x + \frac{9}{L^6}x^2 \\ \int_0^L \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2 dx &= \frac{6}{5L} \\ \int_0^L \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\right)^2 dx &= \frac{3}{L^3} \end{aligned}$$

REFERENCIAS

- [1] H. Frahm, Device for damping vibration of bodies. US patent 989,958. 1911.
- [2] F. Yang, R. Sedaghati, E. Esmailzadeh, "Vibration suppression of structures using tuned mass damper

DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE UN ABSORBEDOR FLEXIBLE PARA EL CONTROL PASIVO DE VIBRACIONES EN UNA ESTRUCTURA TIPO EDIFICIO

MEMORIAS DEL XXVII CONGRESO INTERNACIONAL ANUAL DE LA SOMIM
22 al 24 DE SEPTIEMBRE DE 2021 PACHUCA, HIDALGO, MEXICO

- technology: A state-of-the-art review.," *J. Vib. Control*, vol. 0, pp. 1-25, 2021.
- [3] D. Chen, S. Huang, C. Huang, R. Liu, F. Ouyang, "Passive control of jacket-type offshore wind turbine vibrations by single and multiple tuned mass dampers.," *Mar. Struct.*, vol. 77, Article number 102938, 2021.
- [4] Z. Lu, K. Li, Y. Zhou, "Comparative studies on vibration control of structures with tuned mass damper and particle damper.," *J. Aerospace Eng.*, vol. 31, no. 6, Article number 04018090, 2018.
- [5] S. Elias, V. Matsagar, "Research developments in vibration control of structures using passive tuned mass dampers.," *Annu. Rev. Control.*, vol. 44, pp. 129-156, 2017.
- [6] A. Giaralis, F. Petriani, "Wind-induced vibration in tall buildings using the tuned mass-damper-inerter.," *J. Struct. Eng.*, vol. 143, no. 9, Article number 04017127, 2017.
- [7] D. Bitar, A. Ture Savadkoobi, C.H. Lamarque, E. Gourdon, M. Collet, "Extended complexification method to study nonlinear passive control.," *Nonlinear Dyn.*, vol. 99, no. 2, pp. 1433-1450, 2020.
- [8] R.A. Ibrahim, "Recent advances in nonlinear passive vibration isolators.," *J. Sound Vib.*, vol. 314, no. 3-5 pp. 371-452, 2008.
- [9] Z. Tian, J. Jiang, "An active nonlinear controller emulating a pendulum-type auto-parametric vibration absorber.," *J. Vib. Eng. Technol.*, vol. 8, no. 4 pp. 555-566, 2020.
- [10] S.L. Feudo, C. Touzé, J. Boisson, G. Cumunel, "Nonlinear magnetic vibration absorber for passive control of a multi-storey structure.," *J. Sound Vib.*, vol. 438, pp. 33-53, 2019.
- [11] H.F. Abundis-Fong, J. Enriquez-Zárate, A. Cabrera-Amado, G. Silva-Navarro, "Optimum design of a nonlinear vibration absorber coupled to a resonant oscillator. A case study.," *Shock Vib.*, Article number 2107607, 2018.
- [12] R.S. Haxton, A.D.S. Barr, "The autoparametric vibration absorber.," *J. Eng. Ind.*, vol. 94, no. 1, pp. 119-124, 1972.
- [13] O. Cuvalci, A. Ertas, "Pendulum as vibration absorber for flexible structures: Experiments and Theory.," *ASME J. Vib. Acoust.*, vol. 118, no. 4, pp. 558-566, 1996.
- [14] G. Kerschen, Y.S. Lee, A.F. Vakakis, D.M. McFarland, L.A. Bergman, "Irreversible passive energy transfer in coupled oscillators with essential nonlinearity.," *SIAM J. Appl. Math.*, vol. 66, no. 2, pp. 648-679, 2005.
- [15] O. Gendelman, Y. Starosvetsky, M. Feldman, "Attractors of harmonically forced linear oscillator with attached nonlinear energy sink i: description of response regimes.," *Nonlinear Dyn.*, vol. 51, no. 1-2, pp. 31-46, 2008.
- [16] T.A. Nguyen, S. Pernot, "Design criteria for optimally tuned nonlinear energy sinks-part 1: transient regime.," *Nonlinear Dyn.*, vol. 69, no. 1-2, pp. 1-19, 2012.
- [17] K. Dekemele, R. De Keyser, M. Loccufer, "Performance measures for targeted energy transfer and resonance capture cascading in nonlinear energy sinks.," *Nonlinear Dyn.*, vol. 93, no. 2, pp. 259-284, 2018.
- [18] G. Habib, F. Kádár, B. Papp, "Impulsive vibration mitigation through a nonlinear tuned vibration absorber.," *Nonlinear Dyn.*, vol. 98, no. 3, pp. 2115-2130, 2019.
- [19] A.K. Chopra, *Dynamics of Structures*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 2001.
- [20] H.C. Beraldo, G.R. Franzini, "A nonlinear mathematical model for dynamic analyses of a cantilevered beam with a tip-mass under support excitation.," *J. Braz. Soc. Mech. Sci.*, vol. 42, no. 1, Article number 22, 2020.
- [21] R.C. Hibbeler, *Mechanics of Materials*. Pearson, 2016.
- [22] C.W. De Silva, *Vibration, fundamentals and practice*. New York: CRC press Boca Raton, 2000.
- [23] Jimin He and Zhi-Fang Fu, *Modal Analysis*. UK, Oxford Imprint Butterworth-Heinemann, 2001.
- [24] M. Feldman, *Hilbert Transform Applications in Mechanical Vibration*. John Wiley and Sons, Ltd, Chichester, UK, Mar. 2011.
- [25] V. Ondra, I. A. Sever, C. W. Schwingshackl, *A method for detection and characterisation of structural nonlinearities using the hilbert transform and neural networks*, *Mechanical Systems and Signal Processing* 83 (2017) 210-227.

DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE UN ABSORBEDOR FLEXIBLE PARA EL CONTROL PASIVO DE VIBRACIONES EN UNA ESTRUCTURA TIPO EDIFICIO



¡¡¡Honor a quien honor merece ...!!!